→ Teoria de numeros - Ficha 2

12-

• Dados $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, o menor inteiro positivo k da … com $x, y \in \mathbb{Z}$ é o m.d.c(a,b)

EPTN

• Sendo $d = m.d.c(a,b)$ sabe-se que $d \in \mathbb{Z}^+$, $d = ax' + by'$ para alguns $x', y' \in \mathbb{Z}$

• Seja d' um inteiro positivo tal que $d' = ax'' + by''$, para alguns $x'', y'' \in \mathbb{Z}$
Uma vez que $d = m.d.c(a,b)$ entre $d|a$ e $d|b$ logo $d|(ax'' + by'')$. Como $d, d' \in \mathbb{Z}^+$ concluimos que $d \leq d'$

• Apliquemos o Teorema de Euclides para determinar m.d.c (55, 22)

Temos
$55 = 2 \times 22 + 11$ (1)
$22 = 2 \times 11 + 0$
donde concluimos que o mdc(55, 22) =
• De 1 obtemos $11 = (-2) \times 22 + 1 \times 55$

$33x + 14y = 115$
$33 = 2 \times 14 + 5$
$14 = 2 \times 5 + 4$
$5 = 1 \times 4 + 1$
$4 = 4 \times 1 + 0$ // → Fim
$\therefore$ mdc$(33, 4) = 1$
Como $1 | 115$ a eq tem solução

13-

• A eq $ax + bx = c$ tem solução se e só se

a) $6x + 51y = 22$

$51 = 8 \times 6 + 3$

$6 = 2 \times 3$

• Concluimos que m.d.c $(51, 6) = 3$
Como $3 \nmid 22$ $6x + 51y = 22$ ñ tem solução

b) $33x + 14y = 115$

$33 = 14 \times 2 + 5$

$14 = 2 \times 5 + 4$

$5 = 4 \times 1 + 1$

$4 = 4 \times 1 + 0$

• Concluimos que m.d.c $(33, 14) = 1$
Como $1 | 115$, $33x + 14y = 115$ tem solução

70 e) $14x + 35y = 93$

77

84 $35 = 2 \times 14 + 7$

91 $14 = 2 \times 7$

• Concluimos que mdc (35, 14) = 7

• Como $7 \nmid 93$, $14x + 35y = 93$ ñ tem solução

14-

a) $56x + 72y = 40$

$72 = 1 \times 56 + 16$ (1)

$56 = 3 \times 16 + 8$ (2)

$16 = 2 \times 8 + 0$

• Concluimos que mdc(56, 72) = 8

• Como $8 \mid 40$ então, $56x + 72y = 40$ tem solução

$8 = 56 - 3 \times 16$ (2)

$= 56 - 3 \times (72 - 1 \times 56)$ (1)

$= 56 - 3 \times 72 + 3 \times 56 = -3 \times 72 + 3 \times 56 + 56 = -3 \times 72 + 4 \times 56$

Uma vez que

$8 = 4 \times 56 + (-3) \times 72$

então $40 = 5 \times 8 = \overset{\times 5}{20} \times 56 + \overset{\times 5}{(-15)} \times 72$ $\quad 8 \xrightarrow{\times 5} 40$

Logo, (20, -15) é uma solução particular

• Todos os pares $(x, y) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{cases} x = 20 + \dfrac{72}{8} k \\ y = 15 - \dfrac{56}{8} k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{é} \quad \begin{cases} x = 20 + 9k \\ y = 15 - 7k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

14-

b) $24x + 138y = 18$

$138 = 24 \times 5 + 18$ (1)

$24 = 1 \times 18 + 6$ (2)

$18 = 3 \times 6 + 0$

• Concluímos que o m.d.c $(138, 24) = 6$

Como $6 \mid 18$, a eq tem solução

$6 = 24 - (1 \times 18)$

$= 24 - (1 \times (138 - 24 \times 5))$

$= (-1) \times 138 + 6 \times 24$

De $6 = (-1) \times 138 + 6 \times 24$ segue que

$18 = (-3) \times 138 + 18 \times 24$ Logo

• Todos os pares $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tais q

$$\begin{cases} x = 18 + \frac{138}{6} k \\ y = -3 - \frac{24}{6} k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \begin{cases} x = 18 + 23k \\ y = -3 + 4k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

são soluções da eq

• Resolução de eq diofantinas $ax + by = c$

• calcular o mdc(a,b) e ter a certeza que $mdc(a,b) \mid c$

• fazer as contas "ao contrario" usando as contas feitas do mdc

$mdc(a,b) = ua + vb$

• multiplicar por um numero de forma a que $m \times mdc(a,b) = c$ e fica

$c = (m \times u) \times a + (m \times v) \times a$

• Logo, o par $(m \times u), (m \times v)$ é solução particular da eq.

• Todos os pares $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tais que

$$\begin{cases} x = (m \times u) + \frac{b}{mdc(a,b)} k \\ y = (m \times v) - \frac{a}{mdc(a,b)} k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

são soluções da eq

??? c) $221x + 35y = 11$

$221 = 35 \times 6 + 11$

$35 = 3 \times 11 + 2$

$11 = 5 \times 2 + 1$

$2 = 2 \times 1 + 0$

• Concluímos que o m.d.c $(221, 35) = 1$

Como $1 \mid 11$, a eq tem solução

$1 = 11 - 5 \times 2$

$= 11 - 5 \times (35 - 3 \times 11) =$

$= 221 - 35 \times 6 - 5(35 - 3(221 - 35 \times 6)) =$

$= 221 - 35 \times 6 - 5 \times 35 + 15 \times 221 - 15 \times 6 \times 35 =$

$= 16 \times 221 - 101 \times 35$

$11 = 11 \times 1 = 11 \times (16 \times 221 - 101 \times 35) =$

$= 176 \times 221 - 1111 \times 35$

Logo, $(176, -1111)$ é solução particular da equação.
Todos os pares $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, tais que

$$\begin{cases} x = 176 + \frac{35}{1} k \\ y = -1111 - \frac{221}{1} k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} x = 176 + 35k \\ y = -1111 - 221k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$35 \times 2 = 70$

$35 \times 8 = 280$

$35 \times 6 = 210$

15-

a) $18x + 5y = 48$

Concluímos que $mdc(18,5) = 1$

Como $1 | 48$, a eq tem solução

$18 = 3 \times 5 + 3$

$5 = 1 \times 3 + 2$

$3 = 1 \times 2 + 1$

$1 = 1 \times 1 + 0$

- De 1 e 2 temos

$1 = 3 - 2 \times 1$

$= 3 - (5 - 3 \times 1) \times 1$

$= 18 - 5 \times 3 - (5 - 3 \times 1) \times 1$

$=$

15 -

b) $54x + 21y = 906$

$54 = 2 \times 21 + 12$

$21 = 1 \times 12 + 9$

$12 = 1 \times 9 + 3$

$3 = 1 \times 3 + 0$

• Concluímos que $mdc(54, 21) = 3$

Como $3 | 906$ (3×302) a eq tem solução

• De 1 e 2 temos

$3 = 12 - 1 \times 9$

$= 12 - 1 \times (21 - 1 \times 12)$

$= 2 \times 12 - 1 \times 21$

$= 2 \times (54 - 2 \times 21) - 1 \times 21$

$= 2 \times 54 + (-5) \times 21$

$= 2 \times 54 + (-5) \times 21$

Assim,

$\begin{cases} x = 604 + \frac{21}{3}k \\ y = -1510 - \frac{54}{3}k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$ isto é $\begin{cases} x = 604 + 7k \\ y = -1510 - 18k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

• As soluções da equação são todos os pares $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tais que

$\begin{cases} x = 604 + 7y \\ y = -1510 - 18k \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$, ou seja tais que $\begin{cases} x = 604 + 7k \\ y = -1510 - 18k \\ k > -\frac{604}{7} \approx -86,3 \\ k < -\frac{1510}{18} \approx 83,9 \end{cases}$

• Logo as soluções positivas são pares $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tais que

$\begin{cases} x = 604 + 7y \\ y = -1510 - 18k \end{cases}$ c/ $k \in \mathbb{Z}$ $k \in \{-86, -85, -84, -83\}$

??) e) $5x - 11y = 29$

$11 = 2 \times 5 + 1$

$5 = 5 \times 1 + 0$

$1 = 11 - 2 \times 5$

Concluimos que m.d.c $(5, 11) = 1$

Como $1 | 29$ a eq tem solução

De $1 = 11 - 2 \times 5$ segue que $29 = 11 \times 29 - 58 \times 5$ Logo $(29, -58)$ é uma solução da eq

Assim

$$\begin{cases} x = 319 + (-58)k \\ y = 145 + 29k \end{cases}$$

16-

- Pretendemos determinar inteiros a, b tais $a>0$, $b>0$, $a=8x$ para algum $x \in \mathbb{Z}$, $b=15y$ para algum $y \in \mathbb{Z}$, $4=a-b$

- No sentido de determinar a, b temos de determinar $x, y \in \mathbb{Z}^+$ tais que $4=8x-15y$

$15 = 1 \times 8 + 7$

$8 = 1 \times 7 + 1$

$1 = 1 \times 1 + 1$

- Logo m.d.c $(8,15)=1$. Como, $1 | 4$ a eq tem solução

- $1 = 8 - 1 \times 7$

$= 8 - 1 \times (15 - 1 \times 8)$

$= 2 \times 8 - 1 \times (15)$

Logo $y = 4 \times 8 = 8 \times 8 - 4 \times 15$

→ Assim $(8,4)$ são uma solução

- As soluções positivas da eq $8x-15y=4$ são todos os pares $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tais que

$$\begin{cases} x = 8 - \frac{15}{1}k \\ y = 4 - \frac{8}{1}k \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ isto é } \begin{cases} x = 8 - 15k \\ y = 4 - 8k \\ k < \frac{8}{15} \\ k < \frac{4}{8} \end{cases}$$

- As soluções positivas da eq $8x-15y=4$ são os pares $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tais que

$$\begin{cases} x = 8 - 15k \\ y = 4 - 8k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}_0^-$$

- Exemplos de pares (a,b) tais que $a, b \in \mathbb{Z}^+$ $a = 8x$, $b = 15y$ e

17 -

$16x + (-56y) = 42$

$56 = 3 \times 16 + 8$

$16 = 2 \times 8 + 0$

• Logo $mdc(16, 56) = 8$. Como $8 \mid 42$, a eq tem solução

Assim

$8 = (-56) + (-3) \times 16$

Logo $y = 7 \times 8 = (-7) \times (56) - (-21) \times 16$

Assim $(-7$ e $-21)$ são solução da eq?