• Teoria de números - Ficha 4

31-

• Temos $2^3 \equiv_7 1$ e $50 = 16\times 3+2$

Assim $2^{50} = 2^{16\times 3+2} = (2^3)^{16}\times 2^2 = 1^{16}\times 4 = 4$

• Como $0\leq 4<7$ então, o resto de 2^{50} na divisão por 7 é 4

• Temos

Como $6^2\equiv_7 1$ e $63 = 31\times 2+1$ então $6^{63} = 6^{31\times 2+1} = (6^2)^{31}\times 6$
$= 1^{31}\times 6 = 6$

• Como $0\leq 6<7$ então o resto da divisão de 41^{63} é 6

32-

• Temos $4^3 = 64\equiv_9 1$ e $215 = 71\times 3+2$

Logo $4^{215} = (4^3)^{71}\times 4^2 = 1^{71}\times 16 = 16$ e $16\equiv_9 7$

• Uma vez que $4^{215}\equiv_9 7$ e $0\leq 7<9$, então o resto da divisão de 4^{215} por 9 é 7

33- $11^{10}\equiv_{100} 1$

• Temos $11^2 = 121$ e $121\equiv_{100} 21$

Logo, $11^{10} = (11^2)^5\equiv_{100} 21^5$

• Uma vez $21^2 = 441\equiv_{100} 41$, então $21^5 = ((21)^2)^2\times 21\equiv_{100} 41^2\times 21$

• Por último, temos $81\times 21 = 1701$ e $1701\equiv_{100} 1$

Portanto $11^{10}\equiv_{100} 1$

* Tem uma resolução alternativa [illegible] com combinações (caderno)

34- Queremos provar que $n^3 - n \equiv_3 0$

possíveis

• Para qualquer inteiro n, $n \equiv_3 r$ para algum $r \in \{0,1,2\}$

• caso $n \equiv_3 0$ temos $n^3 - n \equiv_3 0^3 - 0 = 0$ Portanto $n^3 - n = 3K$ para algum $K \in \mathbb{Z}$

• Caso $n \equiv_3 1$ temos $n^3 - n \equiv_3 1^3 - 1 = 0$ Portanto $n^3 - n = 3K$ para certo $K \in \mathbb{Z}$

• caso $n \equiv_3 2$. Temos $n^3 - n \equiv_3 2^3 - 2 = 6$ e $6 \equiv_3 0$
Logo $n^3 - n \equiv_3 0$ portanto $n^3 - n = 3K$ para certo $K \in \mathbb{Z}$

35-
a)

Para qualquer inteiro a, temos $\equiv_{10} r$ com $r \in \{0,1,\dots,9\}$

• caso $a \equiv_{10} 0$: temos $a^2 \equiv_{10} 0$, $0 \leq 0 < 10$ Portanto o resto de a^2 na divisão por 10 é 0 logo, o dígito das unidades de a^2 é 0

• caso $a \equiv_{10} 1$: temos $a^2 \equiv_{10} 1$ como $0 \leq 1 < 10$ então o dígito das unidades de a é 1

• caso $a \equiv_{10} 2$ Temos $a^2 \equiv_{10} 4$, $0 \leq 4 < 10$ logo o dígito das unidades de a^2 é 4
• caso $a \equiv_{10} 3$ temos $a^2 \equiv_{10} 9$, $0 \leq 9 < 10$ logo o dígito das unidades de a^2 é 9

• caso $a \equiv_{10} 4$ temos $a^2 \equiv_{10} 16$ e $16 \equiv_{10} 6$, $0 \leq 6 < 10$ logo o dígito das unidades é 6

• Caso $a^2 \equiv_{10} 5$ temos $a^2 \equiv_{10} 25$ e $25 \equiv_{10} 5$, $0 \leq 5 < 10$ logo o dígito das unidades é 5

• caso $a^2 \equiv_{10} 6$ temos $a^2 \equiv_{10} 36$ e $36 \equiv_{10} 6$, $0 \leq 6 < 10$ logo o dígito das unidades é 6

• caso $a^2 \equiv_{10} 7$ temos $a^2 \equiv_{10} 49$ e $49 \equiv_{10} 9$, $0 \leq 9 < 10$ logo o dígito das unidades é 9

* cont

a) * Cont.

• Caso $a^2 \equiv_{10} 8$ temos $a^2 \equiv_{10} 64$ e $64 \equiv_{10} 4$, $0 \leq 4 < 10$ logo o dígito das unidades é 4

• Caso $a^2 \equiv_{10} 9$ temos $a^2 \equiv_{10} 81$ e $81 \equiv_{10} 1$, $0 \leq 1 < 10$ logo o dígito das unidades é 1

Assim o dígito das unidades de a^2 é 0, 1, 4, 5, 6 ou 9 c.q.m.

b)

36- $\overline{3x5y}$ é divisível por 4 se $\overline{3x5y} \equiv_4 0$

sse $\overline{5y} \equiv_4 0$

sse $5 \times 10 + y \equiv_4 0$

sse $2 + y \equiv_4 0$

sse $y \equiv_4 -2$ sse $y \equiv_4 2$ sse $y \in \{2, 6\}$

$\overline{3x5y}$ é divisível por 9 se $\overline{3x5y} \equiv_9 0$

sse $3 + x + 5 + y \equiv_9 0$

sse $8 + x + y \equiv_9 0$

sse $x + y \equiv_9 -8$

sse $x + y \equiv_9 1$

- caso $y = 2$ temos $x + 2 \equiv_9 1$ donde $x \equiv_9 -1$ Portanto $x \equiv_9 8$ logo $x = 8$
- caso $y = 6$ temos $x + 6 \equiv_9 1$ donde $x \equiv_9 -5$ portanto $x \equiv_9 4$ logo $x = 4$

∴ Os inteiros $\overline{3x5y}$ divisíveis por 4 e 9 são 3852 e 3456

$3,\ x = 8,\ 5,\ y = 2$

$$\begin{array}{r} 3 \times 10^3 \\ 8 \times 10^2 \\ 5 \times 10^1 \\ + \quad 2 \times 10^0 \\ \hline 3852 \end{array}$$

37-

→ Critérios de divisibilidade

$a \equiv_2 a_0$

$a \equiv_4 \overline{a_1 a_0}$

$a \equiv_5 a_0$

$a \equiv_3 a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0$

$a \equiv_9 a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0$

$a \equiv_{11} a_0 - a_1 + a_2 \dots + (-1)^k a_k$

... divisível por 9 se $\overline{34xx58y} \equiv_9 0$

$3 + 4 + x + x + 5 + 8 + y \equiv_9 0$

$2x + y + 20 \equiv_9 0$

$2x + y \equiv_9 -20$

$2x + y \equiv_9 -2$

cont.

$\overline{34x58y}$ é divisível por 11 sse $y-8+5-x+x-4+3 \equiv_{11} 0$

$\Leftrightarrow y-4 \equiv_{11} 0$

$\Leftrightarrow y \equiv_{11} 4$

38-

a) $25x \equiv_{29} 15$

- $25x \equiv_{29} 15$ é solúvel sse $mdc(25,29) \mid 15$

Temos $29 = 1 \times 25 + 4$ (2)

$25 = 6 \times 4 + 1$ (1)

$4 = 4 \times 1 + 0$ Logo $mdc(25,29) = 1$

- Como $1 \mid 15$, a congruência $25x \equiv_{29} 15$ tem solução

$25x \equiv_{29} 15$ sse $\exists y \in \mathbb{Z}$ $25x - 15 = 29y$

sse $\exists y \in \mathbb{Z}$ $25x - 29y = 15$

- De 1 e 2 temos

$1 = 25 - 6 \times 4$

$= 25 - 6 \times (29 - 1 \times 25)$

$= 7 \times 25 - 6 \times 29$

$= 7 \times 25 + 6 \times (-29)$

Logo $15 = 15 \times 1 = 105 \times 2 + 90 \times (-29)$

Assim, $(105, 90)$ é a solução particular de $25x - 29y = 15$

- As soluções de $25x - 29y = 15$ são pares $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tais que

$$x = 105 - 29$$
$$y = 90 - 25\,k \quad , k \in \mathbb{Z}$$

- Assim as soluções da congruência linear são os inteiros $x = 105 - 29k$, $k \in \mathbb{Z}$
- Como $m.d.c(25, 29) = 1$ a congruência linear tem uma única solução módulo 29

$x \equiv_{29} 105$, $x \equiv_{29} 18$ $\quad 105 = 3 \times 29 + 18$

b) $5x \equiv_{26} 2$

- A congruência linear $5x \equiv_{26} 2$ é solúvel se $m.d.c(26, 5) \mid 2$

- Temos $mdc(26, 5) = 1$ e $1 \mid 2$, logo a congruência linear tem soluções

$5x \equiv_{26} 2 \underset{(\times 5)}{\Leftrightarrow} 25x \equiv_{26} 10 \Rightarrow -x \equiv_{26} 10 \Rightarrow x \equiv_{26} -10 \Rightarrow x \equiv_{26} 16$

- Como $mdc(26, 5) = 1$ a congruente $25x \equiv_{26} 1$ tem uma única solução módulo 26: $x \equiv_{26} 16$

- O conjunto das soluções da congruência é $\{16 + 26k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

c) $140x \equiv_{301} 133$

- A congruência tem solução se $mdc(301, 140) \mid 133$

$301 = 2 \times 140 + 21$

$140 = 6 \times 21 + 14$

$21 = 1 \times 14 + 7$

$7 = 1 \times 7 + 0$ $\quad$ Logo, $mdc(301, 140) = 7$ e $7 \mid 133$ logo a congruência tem soluções

$301 \div 7 = 43$, resto 0 $\quad 17 \times 3 = 51 \quad 17 \times 2 = 34 \quad 17 \times 4 = 68 \quad 12 \times 3 \quad 43 \times 4 = 172$

e) Cont

$140x \equiv_{301} 133 \underset{:7}{\Leftrightarrow} 20x \equiv_{43} 19 \Rightarrow 60x \equiv_{43} 47 \Rightarrow$

$\Rightarrow 17x \equiv_{43} 4 \underset{\times 40}{\Leftrightarrow} 170x \equiv_{43} 40 \Rightarrow 2x \equiv_{43} 40$

$\Rightarrow 44x \equiv_{43} 880 \Leftrightarrow x \equiv_{43} 20$

39-

a) $12x \equiv_{16} 6$

- A cong é solúvel se $mdc(12,16) \mid 6$

$16 = 1 \times 12 + 4$

$12 = 3 \times 4 + 0$

Logo $mdc(12,16) = 4$ e $4 \nmid 6$ logo a cong ñ é solúvel

b) $12x \equiv_{35} 7$

- A cong é solúvel se $mdc(12,35) \mid 7$

$35 = 2 \times 12 + 11$

$12 = 1 \times 11 + 1$

$11 = 11 \times 1 + 0$

- Temos $mdc(12,35) = 1$ e $1 \mid 7$ logo a congruência é solúvel.

- Como $1 \mid 12$, $1 \mid 35$ e $1 \mid 7$ então

$12x \equiv_{35} 7 \underset{\times 3}{\Leftrightarrow} 36x \equiv_{35} 21 \Rightarrow x \equiv_{35} 21$

$mdc(3,35) = 1$

- A congruência $12x \equiv_{35} 7$ tem uma única solução módulo 35, $x = 21$

- O conj de soluções da congruência é $\{35 + 21K \mid K \in \mathbb{Z}\}$

c) $12x \equiv_{35} 24$

- A cong é solúvel se mdc $(12,35) \mid 24$
- Temos mdc $(12,35)=1$ e $1 \mid 24$ logo a congruência é solúvel

- Como $1 \mid 12$, $1 \mid 35$ e $1 \mid 24$, então

$$12x \equiv_{35} 24 \underset{\text{mdc}(35,3)=1}{\Leftrightarrow} 36x \equiv_{35} 72 \Leftrightarrow x \equiv_{35} 2$$

- A congruência $12x \equiv_{35} 24$ tem uma única solução módulo 35, $x=2$

O conj de soluções da congruência é $\{2+35k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

d) $10x \equiv_{16} 14$

- A cong é solúvel se mdc $(10,16) \mid 14$
- Temos mdc $(10,16)=2$ e $2 \mid 14$, logo a congruência é solúvel
- Como $2 \mid 10$, $2 \mid 16$ e $2 \mid 14$, então

$$10x \equiv_{16} 14 \Leftrightarrow 5x \equiv_8 7$$

$$5x \equiv_8 7 \underset{\text{mdc}(5,8)=1}{\overset{\times 5}{\Leftrightarrow}} 25 \equiv_8 35 \Leftrightarrow x \equiv_8 3$$

- A congruência $10 \equiv_{16} 14$ tem uma única solução módulo 8, $x=3$
- A cong $10x \equiv_{16} 14$ tem duas soluções módulo 16 $x \equiv_{16} 11$

- O conj de soluções da congruência é $\{3+8k \mid k \in \mathbb{Z}$

e) $60x \equiv_{105} -30$

- A cong é solúvel se mdc $(60,105) \mid -30$

$105 = 1 \times 60 + 45$

$60 = 1 \times 45 + 15$

$45 = 3 \times 15 + 0$

- logo mdc$(60,105)=15$, como $15 \mid -30$ então a congruência é solúvel

$$60x \equiv_{105} -30 \Leftrightarrow 60x \equiv_{105} 75 \Leftrightarrow 3x \Leftrightarrow$$

- Resolvendo a congruência e vendo a solução e concluindo que não

41-

a) $13x \equiv_{42} 17$

- Temos $mdc(13, 42) = 1$. Como $1 \mid 17$, a congruência é solúvel

$13x \equiv_{42} 17 \Leftrightarrow 42 \mid 13x - 17 \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{Z} : 13x - 17 = 42y \Leftrightarrow$
$\exists y \in \mathbb{Z} \; 13x - 12y = 17$

- Resolvendo a eq. diofantina $13x - 42y = 17$ obtemos $x = 221 - 42K$, $K \in \mathbb{Z}$

- A cong. linear $13x \equiv_{42} 17$ tem uma única solução módulo 42 e essa solução é $x \equiv_{42} 221$, i.e., $x \equiv_{42} 11$

- As soluções negativas superiores a -100 são os inteiros $x = 221 - 42K$ c/ $K \in \mathbb{Z}$ tais que $-100 < 221 - 42K < 0$, ou seja, são os inteiros $x = 221 - 42K$, c/ $K = \{-1, -2\}$

b) - As soluções de $13x \equiv_{42} 17$ são os inteiros $x = 221 - 42K$ c/ $K \in \mathbb{Z}$

- Para todo $K \in \mathbb{Z}$, $42K$ é par como 221 é ímpar então $221 - 42K$ é ímpar para todo $K \in \mathbb{Z}$ logo a cong. linear não tem soluções pares

42-

a) $18x \equiv_{21} 9$

• Temos mdc(18,9) = 9. Como 9|21 a congruência linear é solúvel

• $18 = 9 \times 2 + 0$

b) Note-se que a congruência linear $18x \equiv_{21} 9$ tem as mesmas soluções inteiras que a congruência linear $6x \equiv_7 3$. Como mdc(6,7)=1, estas congruências admitem uma só solução módulo 7: $x \equiv_7 4$. Assim, as soluções inteiras são todos os inteiros da forma $x = 4+7t$, com $t \in \mathbb{Z}$

(• equivalentemente podemos afirmar que a congruência linear admite três soluções não congruentes módulo 21, e concluir que são 4, 11, 18. As soluções inteiras serão, assim, todos os inteiros x tais que $x \equiv_{21} 4$ ou $x \equiv_{21} 11$ ou $x \equiv_{21} 18$)

• Usando o facto de as soluções inteiras serem todos os inteiros da forma $x = 4+7t$, com $t \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que as soluções inteiras em $[-1, 80]$ são 4, 11, 18, 25, 32, 39, 46, 53, 60, 67, 74

$$140x \equiv_{301} 133 \underset{:7}{\Leftrightarrow} 20x \equiv_{43} 19 \Leftrightarrow 140x \equiv_{43} 133$$

$$\Leftrightarrow x \equiv_{43} 16$$