→ Teoria de Números - Ficha 5

43-

a)

$$\begin{cases} x \equiv_3 1 \\ x \equiv_5 2 \\ x \equiv_7 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+3t \\ x \equiv_5 2 \\ \text{---} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 1+3t \equiv_5 2 \\ \text{---} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 3t \equiv_5 1 \\ \text{---} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ t \equiv_5 2 \\ \text{---} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+3(2+5K) \\ t = 2+5K \quad (K \in \mathbb{Z}) \\ x \equiv_7 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7+15K \\ \text{---} \\ 7+15K \equiv_7 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 15K \equiv_7 -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ K \equiv_7 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7+15(3+7z) \\ \text{---} \\ K = 3+7z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7+45+105z \end{cases}$$

• 3, 5 e 7 são primos entre si, logo, existe uma só solução módulo $mmc(3,5,7) = 105$

∴ solução: $x \equiv_{105} 52$

b)

$$\begin{cases} x \equiv_2 1 \\ x \equiv_5 2 \\ x \equiv_7 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2K \\ 1+2K \equiv_5 2 \\ \text{---} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2K \equiv_5 1 \\ \text{---} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 4K \equiv_5 2 \\ \text{---} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1K \equiv_5 2 \end{cases}$$

?

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1+2(2+5z) \\ K = 2+5z \\ \text{---} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5+10z \\ \text{---} \\ 5+10K \equiv_7 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 10K \equiv_7 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 7x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5+10(7x) \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5+70x \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x \equiv_4 1 \\ x \equiv_6 5 \\ x \equiv_7 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+4t \\ 1+4t \equiv_6 5 \\ — \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 4t \equiv_6 4 \\ — \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 2t \equiv_3 2 \\ — \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ t \equiv_3 1 \\ — \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+4(1+3k) \\ t = 1+3k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ — \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5+12k \\ — \\ 5+12k \equiv_7 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ 12k \equiv_7 -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ -2k \equiv_7 -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ 2k \equiv_7 1 \end{cases} \underset{\times 4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} — \\ — \\ 8k \equiv_7 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ k \equiv_7 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ k = 4+7n \end{cases}$$

12 7 84

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5+12(4+7n) \\ — \\ — \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5+48+48n \\ — \\ — \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 53+48n \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x \equiv_2 1 \\ x \equiv_3 2 \\ x \equiv_6 5 \\ x \equiv_{12} 5 \end{cases}$$

2

3

$6 = 2 \times 3$

$12 = 2^2 \times 3$

$mdc(2,3) = 1 \mid (1-2)$

$mdc(2,6) = 2 \mid (1-5)$

$mdc(2,12) = 2 \mid (1-5)$

$mdc(3,6) = 3 \mid (2-5)$

$mdc(3,12) = 3 \mid (2-5)$

$mdc(6,12) = 6 \mid (5-5)$

• Existe uma só solução modulo m.m.c$(2,3,6,12) = 12$

$x = 5$ verifica $x \equiv_{12} 5$, $x \equiv_6 5$, $x \equiv_3 2$ e $x \equiv_2 1$

→ Logo, $x \equiv_{12} 5$ é solução do sistema.

3-

c)

$$\begin{cases} 2x \equiv_5 1 \\ 3x \equiv_6 9 \\ 4x \equiv_7 1 \\ 5x \equiv_{11} 9 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{\times 3} \\ \xrightarrow{\div 3} \\ \Leftrightarrow \\ \xrightarrow{\times 2} \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} 4x \equiv_5 2 \\ x \equiv_3 3 \\ 8x \equiv_7 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv_5 2 \\ x \equiv_3 3 \\ x \equiv_7 2 \\ x \equiv_{11} 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3+5k \\ 3+5k \equiv_2 3 \\ — \\ — \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ k \equiv_2 0 \\ — \\ — \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3+5(2t) \\ k = 2t \quad (t \in \mathbb{Z}) \\ — \\ — \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3+10t \\ — \\ 3+10t \equiv_7 2 \\ — \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} — \\ — \\ 10t \equiv_7 -1 \\ — \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} — \\ — \\ 3t \equiv_7 6 \\ — \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} — \\ — \\ t \equiv_7 2 \\ — \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3+10(2+7n) \\ — \\ t = 2+7n \\ — \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 23+70n \\ — \\ — \\ 23+70n \equiv_{11} 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} — \\ — \\ — \\ 4n \equiv_{11} 4-23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} — \\ — \\ — \\ 4n \equiv_{11} 3 \end{cases} \xrightarrow{\times 3} \begin{cases} — \\ — \\ — \\ 12n \equiv_{11} 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 23+70(9+11a) \\ — \\ — \\ n = 9+11a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 653 + 770a \end{cases}$$

f) $\begin{cases} 3x \equiv_9 2 \\ 7x \equiv_6 4 \\ x \equiv_2 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x \equiv_5 4 \\ x \equiv_3 2 \\ x \equiv_2 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x \equiv_5 4 \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases} \begin{cases} x = 4 + 5K \\ 4 + 5K \equiv_3 2 \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \text{—} \\ 5K \equiv_3 -2 \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 9K \equiv_3 -4 \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ K \equiv 2 \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 5(2+3t) \\ K = 2 + 3t \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 14 + 15K \\ \text{—} \\ 14 + 15K \equiv_2 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ 15K \equiv_2 -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ K \equiv_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 14 + 15(1+2s) \\ \text{—} \\ K = 1 + 2s \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 14 + 15 + 30s \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 29 + 30s \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases}$

- A única solução do sistema é $1 \equiv_{30} 29$
- Conj de soluções do sistema $\{29 + 30u \mid u \in \mathbb{Z}\}$

42-

$17x \equiv_{42} 5$

- A cong tem solução sem $\text{mdc}(17,42) \mid 5$

$42 = 17 \times 2 + 8$

$17 = 8 \times 2 + 1$

$8 = 1 \times 8 + 0$

- Logo $\text{mdc}(17,42) = 1$ e a eq tem solução

- Assim

$17x \equiv_{42} 5 \xRightarrow{\times 5} 85x \equiv_{42} 25 \Rightarrow 1x \equiv_{42} 25 \Rightarrow x \equiv_{42} 25$

45 -

• A cong $19x \equiv_{84} 4$ é solúvel se $mdc(19,84) \mid 4$

$84 = 19 \times 4 + 8$

$19 = 8 \times 2 + 3$

$8 = 3 \times 2 + 2$

$3 = 2 \times 1 + 1$

$2 = 2 \times 1 + 0$

• Temos $mdc(19,84) = 1$ e $1 \mid 4$. Logo, a cong linear tem solução. A cong linear pode ser resolvida determinando as soluções de um sistema de cong lineares

• Fatorizando 84 em números primos temos

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$

Logo,

$$19x \equiv_{84} 4 \iff \begin{cases} 19x \equiv_{2^2} 4 \\ 19x \equiv_3 4 \\ 19x \equiv_7 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 19x \equiv_4 4 \\ 19x \equiv_3 4 \\ 19x \equiv_7 4 \end{cases} \xrightarrow[+3]{}$$

$$\begin{cases} 3x \equiv_4 0 \\ x \equiv_3 1 \\ x \equiv_7 12 \end{cases} \xrightarrow{:3\ (mdc(3,4)=1)} \begin{cases} x \equiv_4 0 \\ x \equiv_3 1 \\ x \equiv_7 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4k + 0 \\ 4k \equiv_3 1 \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ k \equiv_3 1 \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4(1 + 3t) \\ k = 1 + 3t \quad (t \in \mathbb{Z}) \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 12t \\ \text{—} \\ 4 + 12t \equiv_7 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ 12t \equiv_7 8 \end{cases} \xrightarrow[mdc(12,7)=1]{:4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ 3t \equiv_7 2 \end{cases} \xrightarrow[\times 5]{} \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ 15t \equiv_7 10 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ 1t \equiv_7 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ t = 3 + 7n \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4 + 12(3 + 7n) \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 + 36 + 84n \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 40 + 84n \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases}$$

• As soluções do sistema e, portanto, a solução de $19x \equiv_{84} 4$, é x
temos $40+84t \geq -200$ e $40+84t \leq 284$ se $t \geq -2{,}9$ e t
logo as soluções pertencentes ao intervalo $]-200, 284]$ são os
inteiros, $x = 40+84t$, com $t \in \{-2,-1,0,1,2\}$. As soluções
correspondentes são $x=-128$, $x=-44$, $x=40$, $x=124$ e $x=208$

46-

$$\begin{cases} x \equiv_8 2 \\ x \equiv_7 1 \\ x \equiv_6 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2+8K \quad (K \in \mathbb{Z}) \\ 2+8K \equiv_7 1 \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 8K \equiv_7 -1 \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ K \equiv_7 6 \\ \text{—} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2+8(6+7t) \\ K = 6+7t \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50+56t \\ \text{—} \\ 50+56t \equiv_6 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ 56t \equiv_6 -48 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ 28t \equiv_3 -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ \\ 1t \equiv_3 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50+56(3n) \\ \text{—} \\ t = 3n+0 \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50+168n \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases}$$

• Logo, as soluções inteiras são da forma $x = 50+168n$ com $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, as soluções positivas e inferiores a 336 são ($n=0$, $n=1$) $x=50$ e $x=218$.

47-

$$\begin{cases} a \equiv_5 3 \\ a \equiv_9 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3+5K \\ 3+5K \equiv_9 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 5K \equiv_9 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 1K \equiv_9 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3+5(9n+2) \\ K = 9n+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3+45n+10 \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 13+45n \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv_{45} 13 \end{cases}$$

• Pelo que, o resto da divisão de a por 45 é 13

48- $3 \mid m$

$5 \mid (m+2)$

$$\begin{cases} m \equiv_3 0 \\ (m+2) \equiv_5 0 \\ (m-3) \equiv_9 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \equiv_3 0 \\ m \equiv_5 -2 \\ m \equiv_9 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \equiv_3 0 \\ m \equiv_5 3 \\ m \equiv_9 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3k \\ 3k \equiv_5 3 \\ \_\_ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \_\_ \\ k \equiv_5 1 \\ \_\_ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3(5t+1) \\ k = 5t+1 \quad (t \in \mathbb{Z}) \\ \_\_ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 15t+3 \\ \_\_ \\ 15t+3 \equiv_9 0 \end{cases} \Rightarrow$$

??

$$\Rightarrow \begin{cases} \_\_ \\ \_\_ \\ 15t \equiv_9 -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \_\_ \\ \_\_ \\ 5t \equiv_3 -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \_\_ \\ \_\_ \\ 2t \equiv_3 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 15(3n+1)+3 \\ \_\_ \\ t = 3n+1 \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

simplificar 1

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 45n + 18 \\ \_\_ \\ \_\_ \end{cases} \Rightarrow \Big\{$$

49-

$$\begin{cases} x \equiv_2 1 \\ x \equiv_3 2 \\ x \equiv_4 3 \\ x \equiv_5 4 \\ x \equiv_6 5 \\ x \equiv_7 0 \end{cases} \quad \ldots$$

- Existe uma só solução módulo 420 $x \equiv_{420} 119$. Assim, o menor número de ovos que o cesto pode conter é 119.

50-

$$\left\{\begin{array}{l} a \equiv_{17} 3 \\ a \equiv_{16} 10 \\ a \equiv_{15} 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 17K+3 \quad (K \in \mathbb{Z}) \\ 17K+3 \equiv_{16} 10 \\ — \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} — \\ 17K \equiv 7 \\ — \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} — \\ K \equiv_{16} 7 \\ — \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 17(16t+7)+3 \\ K = 16t+7 \quad (t \in \mathbb{Z}) \\ — \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 172t + 119 \\ — \\ 172t + 119 \equiv_{15} 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} — \\ — \\ 172t \equiv_{15} -119 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} — \\ — \\ 7t \equiv_{15} 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{ \ldots \right.$$

- Existe uma só solução modulo 4080: $x \equiv_{4080} 3930$. Assim, o nº mínimo de moedas é 3930