2 - Equações Diofantinas

Equações diofantinas

Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, com $a, b \neq 0$, queremos encontrar $x, y \in \mathbb{Z}$, tais que:

$$a\,x + b\,y = c$$

Uma equação deste tipo diz-se uma equação diofantina .

Equações diofantinas - existência de solução

Seja d=m.d.c.(a,b) .

Se a equação tiver solução, como $d|a$ e $d|b$ então

$$d|a\,x+b\,y=c$$

Por outro lado, se $d|c$, então existe $q\in\mathbb{Z}$ tal que $c=q\,d$.

Sabemos, pelo Algoritmos de Euclides, que existem $x_1, y_1\in\mathbb{Z}$ tais que

$$d=a\,x_1+b\,y_1$$

e multiplicando ambos os membros por q,

$$c=q\,d=a\,q\,x_1+b\,q\;\;y_1=a\,(q\,x_1)+b\,(q\,y_1)$$

e portanto a equação diofantina tem solução, $x=q\,x_1$ e $y=q\,y_1$.

Equações diofantinas - solução geral

Teorema

Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$*, com* $a, b \neq 0$*, seja* d*=m.d.c.*(a, b) *e considere-se a equação diofantina*

$$a\,x + b\,y = c$$

1. *A equação* $a\,x + b\,y = c$ *tem solução* $\Leftrightarrow$ $d \mid c$

2. *Se a equação tem uma solução* $x = x_0$ *e* $y = y_0$*, então a equação tem uma infinidade de soluções, dadas por:*

$$x = x_0 + \frac{b}{d}\,k$$
$$y = y_0 - \frac{a}{d}\,k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Equações diofantinas - solução geral

Demonstração 2 - Seja (x_0, y_0) uma solução particular da equação diofantina $a\,x + b\,y = c$. Se x e y são uma solução da equação, então:

$$a\,x + b\,y = a\,x_0 + b\,y_0 \quad \Leftrightarrow \quad a(x - x_0) = b(y_0 - y) \quad (*)$$

e sendo $d =$m.d.c.(a, b), então

$$\frac{a}{d}(x - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y)$$

Como m.d.c$(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$, pelo Lema de Euclides: $\frac{a}{d} \mid y_0 - y$

Logo, existe $k \in \mathbb{Z}$: $y_0 - y = \frac{a}{d}\,k$ e portanto $y = y_0 - \frac{a}{d}\,k$

Substituindo em $(*)$, temos que:

$a(x - x_0) = b\frac{a}{d}k$ e portanto $x = x_0 + \frac{b}{d}\,k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Equações diofantinas - Exemplo 1

Vamos encontrar todas as soluções da equação diofantina

$$812\,x + 340\,y = 12$$

Já vimos que m.d.c.$(812, 340) = 4$ e como $4|12$ a equação tem solução.

Vimos também, usando o algoritmo de Euclides, que

$$4 = 812 \times (-18) + 340 \times 43$$

Multplicando ambos os membros por 3, obtemos:

$$12 = 812 \times (-18 \times 3) + 340 \times (43 \times 3)$$

pelo que $x_0 = -54$ e $y_0 = 129$ é uma solução da equação.

Equações diofantinas - Exemplo 1

Então a solução geral da equação será:

$$x = -54 + \frac{340}{4}\,k = -54 + 85\,k$$

$$y = 129 - \frac{812}{4}\,k = 129 - 203\,k$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Abaixo temos uma tabela com algumas das soluções

k	$\cdots\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots\cdots$
x	$\cdots\cdots$	-224	-139	-54	31	116	201	$\cdots\cdots$
y	$\cdots\cdots$	535	332	129	-74	-277	-480	$\cdots\cdots$

Também podíamos ter começado por simplificar a equação dividindo ambos os membros pelo m.d.c.$(812, 340) = 4$

$$812\,x + 340\,y = 12 \iff 203\,x + 85\,y = 3$$

Equações diofantinas - Exemplo 2

Vamos agora resolver a equação diofantina

$$13\,x - 17\,y = 42$$

Como 13 e 17 são primos então m.d.c.$(13, 17) = 1$.

Vamos usar o Algoritmo de Euclides para escrever 1 como combinação linear de 13 e -17 .

$$\begin{aligned} 17 &= 1 \times 13 + 4 \\ 13 &= 3 \times 4 + 1 \\ 4 &= 4 \times 1 + 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 1 &= 13 - 3 \times 4 = \\ &= 13 - 3\,(17 - 13) = \\ &= 13 \times 4 - 17 \times 3 \quad (*) \end{aligned}$$

Logo m.d.c.$(13, 17) = 1$ e multiplicando $(*)$ por 42 , obtemos

$$42 = 13(4 \times 42) - 17(3 \times 42)$$

pelo que $x_0 = 168$ e $y_0 = 126$ é uma solução da equação.

Equações diofantinas - Exemplo 2

Então a solução geral da equação será:

$$x = 168 + \frac{-17}{1}\, k = 168 - 17\, k$$

$$y = 126 - \frac{13}{1}\, k = 126 - 13\, k$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Abaixo temos uma tabela com algumas das soluções

k	$\cdots\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots\cdots$
x	$\cdots\cdots$	202	185	168	151	134	117	$\cdots\cdots$
y	$\cdots\cdots$	152	139	126	113	100	87	$\cdots\cdots$

Equações diofantinas - Exemplo 3

Vamos agora resolver a equação diofantina

$$-36\,x - 21\,y = 39$$

Dividindo ambos os membros por -3 obtemos a seguinte equação :

$$12\,x + 7\,y = -13$$

Vamos usar o Algoritmo de Euclides para escrever m.d.c.$(12, 7)$ como combinação linear de 12 e 7 .

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \times 7 + 5 \\ 7 &= 1 \times 5 + 2 \\ 5 &= 2 \times 2 + 1 \\ 2 &= 2 \times 1 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \times 2 = \\ &= 5 - 2\,(7 - 5) = -2 \times 7 + 3 \times 5 = \\ &= -2 \times 7 + 3(12 - 7) \\ &= 12 \times 3 + 7 \times (-5) \quad (*) \end{aligned}$$

Logo m.d.c.$(12, 7) = 1$ e multiplicando $(*)$ por -13 , obtemos

$$-13 = 12(3 \times (-13)) + 7(-5 \times (-13))$$

pelo que $x_0 = -39$ e $y_0 = 65$ é uma solução da equação.

Então a solução geral da equação será:

$$x = -39 + \frac{7}{1}\,k = -39 + 7\,k$$

$$y = 65 - \frac{12}{1}\,k = 65 - 12\,k$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Abaixo temos uma tabela com algumas das soluções

k	⋯⋯	-2	-1	0	1	2	3	⋯⋯
x	⋯⋯	-53	-46	-39	-32	-25	-18	⋯⋯
y	⋯⋯	89	77	65	53	41	29	⋯⋯