Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Teste - Teoria de Números

duração: 2 horas

Nome:	**Número:**

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique para cada alínea se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), marcando x no quadrado respetivo.

		V	F
1.	O resto da divisão de 85 por -6 é 7 porque $85 = (-6) \times (-13) + 7$. ↳ o resto da divisão por -6 tem de ser um inteiro r t.q. $0 < r \leq \|-6\| = 6$	☐	☒
2.	Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a\|b$ e $a \nmid (5b + 4c)$, então $a \nmid c$. ↳ Como $a\|b$, $a\|5b$. Se $a\|c$ então $a\|4c$. Assim, $a\|(5a+4c)$, o que não acontece	☒	☐
3.	Se a é um inteiro tal que $\text{m.d.c.}(a, 80) = 10$ e $\text{m.m.c.}(a, 80) = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$, então $a > 500$. $80 = 2^4 \times 5$ $\text{mdc}(a,80) = 2\times 5 \Rightarrow 2^2 \nmid a$. $\text{m.m.c.}(a,80) = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \Rightarrow 3^2 \| a$ e $5^2 \| a$ $a = 2 \times 3^2 \times 5^2 < 500$	☐	☒
4.	Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, $\text{m.d.c.}(a, b) \mid \text{m.d.c.}(3a, 8b)$. $d = \text{mdc}(a,b)$ $d\|a$ e $d\|b \Rightarrow d\|3a$ e $d\|8b \Rightarrow d\| \text{mdc}(3a,8b)$	☒	☐
5.	Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n < 280$, se n não admite um divisor d tal que $1 < d \leq 14$, então n é um número primo. $\sqrt{n} < \sqrt{280} < 17$. Assim, $\sqrt{n} < 17$. Sabemos que, se n não admitir divisores d t.q. $1 < d \leq \sqrt{n}$, então n é primo. Resta verificar se n pode ser divisível por 15 ou por 16. Se n fosse divisível por 15 (respetivamente por 16), seria também divisível por 3 e por 5 (respetivamente, por 4), o que não acontece. Logo, $15 \nmid n$ e $16 \nmid n$.	☒	☐
6.	Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$. Se p é um número primo e $p \mid a^3b^2$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.	☒	☐
7.	O inteiro 3333 é combinação linear de 5 e 30. ↳ é verdade sse $\text{mdc}(5,30) \mid 3333$. $\text{mdc}(5,30) = 5 \nmid 3333$	☐	☒
8.	O conjunto $\{-2, 1, 3, 6, 10, 5\}$ é um sistema completo de resíduos módulo 6. $-2 \equiv_6 4$ e $10 \equiv_6 4$	☐	☒
9.	$-85 \equiv 5 (\text{mod}\, 15)$. $-85 \equiv_{15} 5 \Leftrightarrow 15 \mid (5 - (-85))$	☒	☐
10.	A congruência linear $6x \equiv 5 (\text{mod}\, 33)$ tem 3 soluções módulo 33. $\text{mdc}(6,33) = 3 \nmid 5$ → não tem soluções	☐	☒

Grupo II

Para cada uma das questões deste grupo, indique a sua resposta no espaço disponibilizado a seguir à questão, justificando sucintamente.

1. Considere as divisões seguintes

$$\begin{array}{r|l} 255 & 123 \\ \hline 9 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 123 & 9 \\ \hline 6 & 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 6 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Indique o m.d.c.(255, 123) e exprima-o como combinação linear de 255 e 123.

Resposta: $\text{mdc}(255,123) = 3$

$$\begin{aligned} 3 &= 9 - 6 \times 1 \\ &= 9 - (123 - 9 \times 13) \times 1 \\ &= 9 - 123 \times 1 + 9 \times 13 \\ &= 9 \times 14 - 123 \times 1 \\ &= (255 - 123 \times 2) \times 14 - 123 \times 1 \\ &= 255 \times 14 + 123 \times (-29) \end{aligned}$$

Logo, $\text{mdc}(255,123) = 255 \times 14 + 123 \times (-29)$.

2. Sabendo que $(28, 58)$ é uma solução da equação diofantina $255x - 123y = 6$, justifique que a congruência linear $255x \equiv 6(\text{mod}\, 123)$ é solúvel e indique duas das suas soluções não congruentes módulo 123.

   Resposta: $255x \equiv_{123} 6$ é solúvel sse $255x - 123y = 6$ é solúvel.

   $(28,58)$ é uma solução de $255x - 123y = 6$ $\Rightarrow$ 28 é solução de $255x - 123y = 6$

   $\Rightarrow$ $255x - 123y = 6$ é solúvel.

   $\text{mdc}(255,123) = 3 \mid 6 \Rightarrow \exists$ 3 soluções incongruentes módulo 123.

   $\frac{123}{3} = 41$

   soluções módulo 123: $x \equiv_{123} 28$ ou $x \equiv_{123} 69$ ou $x \equiv_{123} 110$

   (OBS: $28 \xrightarrow{+41} 69 \xrightarrow{41} 110$

3. Determine o resto de $3^{124} + 1$ na divisão por 7.

   Resposta: $7 \nmid 3$ Logo, pelo P.T. Fermat, $3^6 \equiv_7 1$.

   $124 = 6 \times 20 + 4$

   $$
   \begin{aligned}
   3^{124} + 1 &\equiv_7 (3^6)^{20} \times 3^4 + 1 \\
   &\equiv_7 1^{20} \times 3^4 + 1 \\
   &\equiv_7 3^4 + 1 \\
   &\equiv_7 4 + 1 \\
   &\equiv_7 5
   \end{aligned}
   $$

4. Determine o dígito x tal que $\overline{2734x}$ seja um inteiro divisível por 3 e tenha resto 1 na divisão por 4.

   Resposta: $\begin{cases} 2+7+3+4+x \equiv_3 0 \\ \overline{4x} \equiv_4 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x \equiv_3 0 \\ \quad \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv_3 -1 \\ \quad \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv_3 2 \\ - \end{cases} \underset{x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 2 \vee x = 5 \vee x = 8 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} x = 2 \\ 42 \equiv_4 1 \end{cases}}_{\substack{\text{impossível} \\ 42 \equiv_4 2}} \vee \begin{cases} x = 5 \\ 45 \equiv_4 1 \end{cases} \vee \underbrace{\begin{cases} x = 8 \\ 48 \equiv_4 1 \end{cases}}_{\substack{\text{impossível} \\ 48 \equiv_4 0}}$

   $\Leftrightarrow x = 5$

   Logo, $x = 5$.

Grupo III

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Num refeitório, com capacidade para 902 pessoas, há 55 mesas circulares e 77 mesas retangulares. As mesas circulares têm todas a mesma capacidade, o mesmo se passando com as mesas retangulares. Além disso, a capacidade de qualquer um dos tipos de mesas é superior ou igual a 2.
   (a) Escreva uma equação diofantina cuja resolução permita obter a capacidade das mesas circulares e a capacidade das mesas retangulares.
   (b) Determine a capacidade das mesas circulares e a capacidade das mesas retangulares.

2. Resolva a congruência linear $6x \equiv 501(\text{mod}\, 21)$ e indique a maior solução não positiva.

3. Considere o sistema de congruências lineares (S) a seguir indicado

$$
(S) \begin{cases} x \equiv 3\,(\text{mod}\, 7) \\ x \equiv 4\,(\text{mod}\, 5) \\ x \equiv 1\,(\text{mod}\, 3) \end{cases}
$$

   Recorrendo ao Teorema Chinês dos Restos, justifique que o sistema (S) é solúvel e resolva-o. Indique a menor solução de (S) maior do que 200.

Cotações: Grupo I: 7, 5. Grupo II: 6, 0. Grupo III: 2, 5 + 1, 75 + 2, 25.

1)

a) $55x + 77y = 902$

b) $55 = 5 \times 11$
$77 = 7 \times 11$

$mdc(55,77) = 11$

$11 \mid 902$

$902 = 11 \times 82$

$77 = 55 \times 1 + 22$ $\qquad$ $55 = 22 \times 2 + 11$ $\qquad$ $22 = 11 \times 2 + 0$

$$\begin{aligned} 11 &= 55 - 22 \times 2 \\ &= 55 - (77 - 55 \times 1) \times 2 \\ &= 55 \times 3 - 77 \times 2 \\ &= 55 \times 3 + 77 \times (-2) \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} 902 &= 55 \times (3 \times 82) + 77 \times (-2 \times 82) \\ &= 55 \times 246 + 77 \times (-164). \end{aligned}$$

$\begin{cases} x_0 = 246 \\ y_0 = -164 \end{cases}$ solução particular

solução geral : $\begin{cases} x = 246 + 7t \\ y = -164 - 5t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{Z})$

$\begin{cases} x > 2 \\ y > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 246 + 7t > 2 \\ -164 - 5t > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -34{,}85 \\ t < -33{,}2 \end{cases} \Rightarrow t = -34$

Para $t = -34$,

$x = 246 + 7 \times (-34) = 8$ — capacidade mesas circulares

$y = -164 - 5 \times (-34) = 6$ — " mesas retangulares

2) $6x \equiv_{21} 501$

$mdc(6,21) = 3$

$3 \mid 501$.

Logo, a congruência linear é solúvel.

Temos que $6x \equiv_{21} 501$

$\Leftrightarrow \frac{6}{3}x \equiv_{\frac{21}{3}} \frac{501}{3}$

$\Leftrightarrow 2x \equiv_7 167$

$\Leftrightarrow 2x \equiv_7 6$

$167 \equiv_7 6$

$mdc(2,7) = 1$

Existe uma só solução módulo 7.

Temos que

$6x \equiv_{21} 501 \Leftrightarrow 2x \equiv_7 6$

$\Leftrightarrow x \equiv_7 3$.

Logo, a solução módulo 7 é $x \equiv_7 3$.

Assim, as soluções inteiras são os inteiros da forma $x = 3 + 7t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

A maior solução não positiva é

$$\begin{aligned} x &= 3 + 7(-1) \\ &= -4. \end{aligned}$$

3) 3, 5 e 7 são primos entre si.

Logo, o sistema admite solução única módulo $3 \times 5 \times 7 = 105$.

$$\begin{cases} x \equiv_7 3 \\ x \equiv_5 4 \\ x \equiv_3 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 7k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 3 + 7k \equiv_5 4 \\ \text{—} \end{cases} \underset{7 \equiv_5 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{—} \\ 2k \equiv_5 1 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ k \equiv_5 3 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 7(3+5t) \\ k = 3 + 5t \quad (t \in \mathbb{Z}) \\ 24 + 35t \equiv_3 1 \end{cases} \underset{\substack{24 \equiv_3 0 \\ 35 \equiv_3 2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ 2t \equiv_3 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ t \equiv_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ t = 2 + 3n \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x = 24 + 35t &= 24 + 35(2 + 3n) \\ &= 94 + 105n, \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Assim, a única solução módulo 105 é

$$x \equiv_{105} 94.$$

Logo, as soluções inteiras são dadas por

$$x = 94 + 105n, \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}.$$

A menor solução maior que 200 é dada por $n = 2$ e é

$$\begin{aligned} x &= 94 + 105 \times 2 \\ &= 304. \end{aligned}$$