# V. ANÁLISE DE SINAIS

## Capítulo que aborda:

- **Análise espectral** dos sinais
  - Interpretação das propriedades dos sinais no **domínio das frequências**
  - **Séries de Fourier**
  - Teorema da potência de **Parseval**
  - **Largura de Banda** de um sinal
- **Modulação** de Sinais
  - Consequências no espectro do sinal após modulação

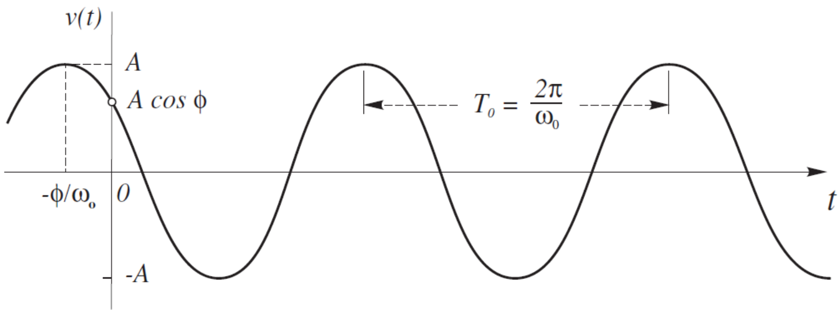




# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

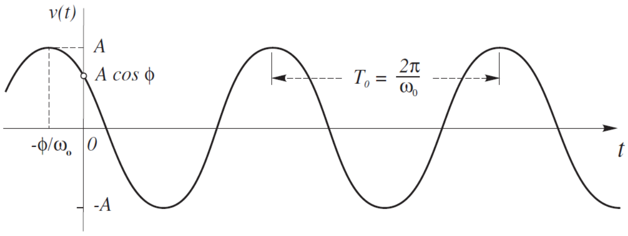
- Considere-se uma forma de onda sinusoidal *v(t)*

$$\boxed{v(t) = A\ \cos(\omega_0 t + \phi)}$$



# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

$$\boxed{v(t) = A\ \cos(\omega_0 t + \phi)}$$




$\omega_0$ é a frequência angular

$\phi$ o ângulo de fase

$T_0 = 2\pi/\omega_0$

$f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$

$W_0 = 2.\pi.f_0$



Fundamentos de Comunicação de Dados
Licenciatura em Engenharia Informática
Departamento de Informática, Universidade do Minho

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

- A sinusoide pode ser representada no plano complexo por uma exponecial ou **fasor**

- Teorema de Euler:

$$\boxed{e^{\pm \jmath\theta} = \cos\theta \pm \jmath \sin\theta}$$

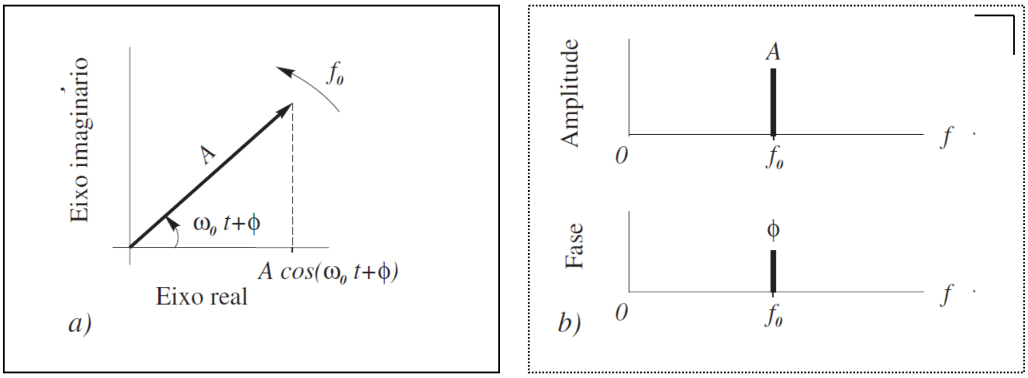
logo pode representar-se qualquer sinusoide como sendo a parte real de uma **exponencial complexa**:

$$\boxed{A\ \cos(\omega_0 t + \phi) = A\,\Re\left[e^{\jmath(\omega_0 t + \phi)}\right] = \Re\left[A\ e^{\jmath\omega_0 t} \cdot e^{\jmath\phi}\right]}$$

representação por fasor; termo dentro do parêntisis recto pode ser considerado como um vector rotativo no plano complexo

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

$$\boxed{A\ \cos(\omega_0 t + \phi) = A\,\Re\left[e^{\jmath(\omega_0 t+\phi)}\right] = \Re\left[A\,e^{\jmath\omega_0 t}\cdot e^{\jmath\phi}\right]}$$




$W_0 = 2.\pi.f_0$

descrição do fasor no domínio da frequência: **espectro de linha** - dois gráficos 1) amplitude em função da frequência e 2) fase em função da frequência





# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

## Regras a adoptar na representação espectral:

(i) A variável independente é a *frequência*, $f$ em Hz. A frequência angular $\omega$, em radianos/seg, é uma notação sintética para o valor $2\pi f$

(ii) Os ângulos de fase são medidos relativamente a funções *cosseno*. Os senos serão convertidos a cosseno através da identidade $\sin \omega t = \cos(\omega t - 90°)$

(iii) A amplitude é sempre uma quantidade *positiva*. Quando aparecerem sinais com amplitude negativa, esta será absorvida na fase, isto é, $-A\ \cos(\omega t) = A\ \cos(\omega t \pm 180°)$

(iv) Os ângulos de fase são expressos em *graus* embora ângulos tais como $\omega t$ sejam inerentemente em radianos.

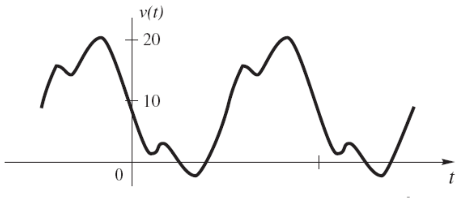
# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

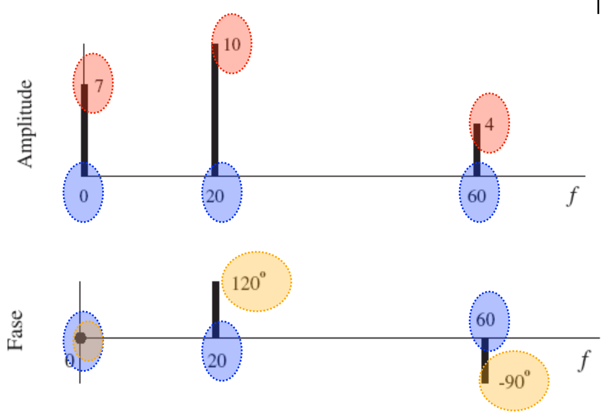
## *- Exemplo de espectro de linhas unilateral -*

$v(t) = 7 - 10\cos(40\pi t - 60^{\circ}) + 4\,sen(120\pi t)$

?

$$\boxed{v(t) = 7\cos(2\pi\, 0t) + 10\cos(2\pi\, 20t + 120^{\circ}) + 4\cos(2\pi\, 60t - 90^{\circ})}$$






**Fundamentos de Comunicação de Dados**
Licenciatura em Engenharia Informática
Departamento de Informática, Universidade do Minho

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

- É comum a utilização de uma representação de **espectros de linhas bilateral**
  - *por questões de manipulação e aplicação de algumas "ferramentas" matemáticas*
- Representação espectral passa a contemplar também frequências negativas
- Baseado na propriedade:

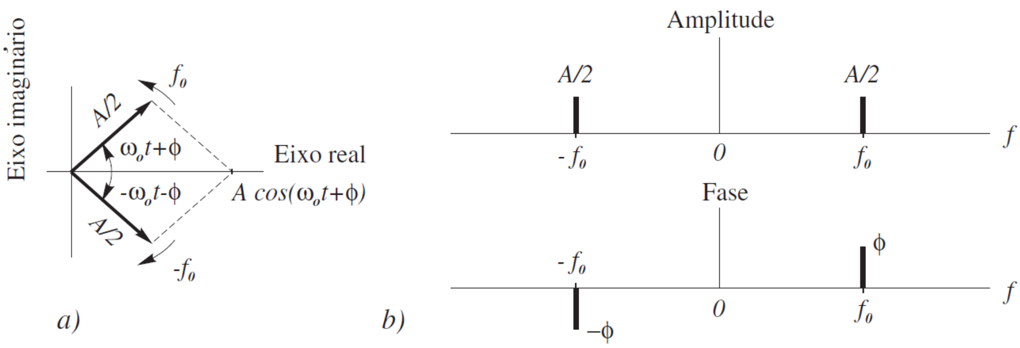
$$\boxed{\Re[z] = 1/2\,(z + z^{*})}$$

$$A\,\cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2}\,e^{\jmath 2\pi f_0 t}\cdot e^{\jmath\phi} + \frac{A}{2}\,e^{-\jmath 2\pi f_0 t}\cdot e^{-\jmath\phi}$$

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

## ESPECTRO DE LINHAS BILATERAL

$$A\ \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2}\, e^{\jmath 2\pi f_0 t} \cdot e^{\jmath\phi} + \frac{A}{2}\, e^{-\jmath 2\pi f_0 t} \cdot e^{-\jmath\phi}$$



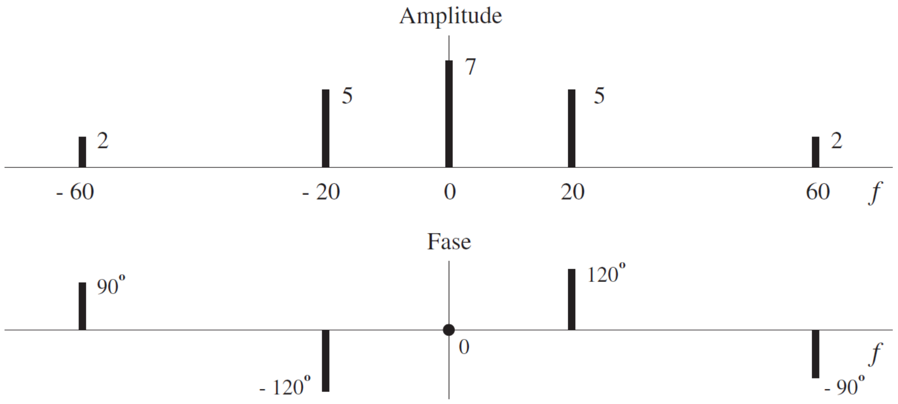



Fundamentos de Comunicação de Dados
Licenciatura em Engenharia Informática
Departamento de Informática, Universidade do Minho

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

## *Mesmo exemplo mas com espectro de linhas bilateral…*

$$\boxed{v(t) = 7\ cos(2\pi\ 0t) + 10\ cos(2\pi\ 20t+120^o) + 4\ cos(2\pi\ 60t-90^o)}$$



# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

## Sinais Periódicos

$v(t) = v(t \pm mT_0)$

## O valor médio de *v(t)*

$$\langle v(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} v(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t)\,dt$$

## Potência média do Sinal, S

$$S = \langle |v(t)|^2\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |v(t)|^2\,dt$$

se $0 < S < \infty$ então o sinal é designado de sinal periódico de potência





# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

– No exemplos de espectros apresentados anteriormente o sinal *v(t)* era dado como uma soma de uma parcela constante e duas sinusoides
  - nesse caso foi imediata a passagem para o domínio das frequências
– Como **decompor um determinado sinal periódico** apresentado no domínio do tempo em **somas sinusoidais**?
  - usar o desenvolvimento em Série **Exponencial de Fourier**

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

Por falar em **Fourier** (só para os curiosos...)

**Joseph Fourier**

| | |
|---|---|
| **Born** | Jean-Baptiste Joseph Fourier<br>21 March 1768<br>Auxerre, Kingdom of France |
| **Died** | 16 May 1830 (aged 62)<br>Paris, France |

- será que também descobriu alguma equação famosa? (...e será que faz parte da lista das 17 ?!...)
- e, se sim... que impacto teve (e tem) essa descoberta no nosso mundo?

1700???... 1800???



Fundamentos de Comunicação de Dados
Licenciatura em Engenharia Informática
Departamento de Informática, Universidade do Minho

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

## Série de Fourier

– Seja *v(t)* um sinal de potência de período $T_0=1/f_0$

– desenvolvimento em **série exponencial de Fourier**:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{j2\pi n f_0 t} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

em que os coeficientes $C_n$ da série são dados por

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$

?

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

## Série de Fourier

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, e^{j2\pi n f_0 t} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

em que os coeficientes $C_n$ da série são dados por

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) \, e^{-j2\pi n f_0 t} \, dt$$

- *v(t)* consiste numa soma de fasores de amplitude $|C_n|$ e ângulo arg $C_n$ com frequências $n f_0 = 0, \pm f_0, \pm 2 f_0, \cdots$
- A representação gráfica no domínio da frequência consiste num **espectro de linhas bilateral** definido pelos coeficientes da série

$|C(n f_0)|$ representará o *espectro de amplitude*

$\arg C(n f_0)$ representará o *espectro de fase*



Fundamentos de Comunicação de Dados
Licenciatura em Engenharia Informática
Departamento de Informática, Universidade do Minho

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

Algumas propriedades dos espectros dos sinais de potência:

⇨ Todas as frequências são multiplas inteiras, *harmónicas*, da *frequência fundamental*, $f_0 = \frac{1}{T_0}$. Assim, as linhas espectrais estão uniformemente espaçadas de um valor igual a $f_0$

⇨ A componente constante é igual ao *valor médio* do sinal, dado que para $n = 0$, a equação 2.10 dá

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) \, dt = \langle v(t) \rangle$$

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

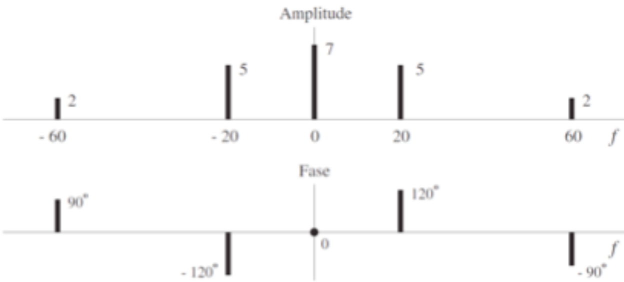
Após o cálculo dos coeficientes (para representação espectral) é possível apresentar o sinal como uma soma de sinusoides:

$$\boxed{v(t) \;=\; C_0 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} |2C_n| \;\cos(2\pi n f_0 t + \arg C_n)}$$

?

**(confirmar recordando o exemplo inicial)**

$$v(t) = 7\cos(2\pi\, 0t) + 10\cos(2\pi\, 20t + 120^{\circ}) + 4\cos(2\pi\, 60t - 90^{\circ})$$

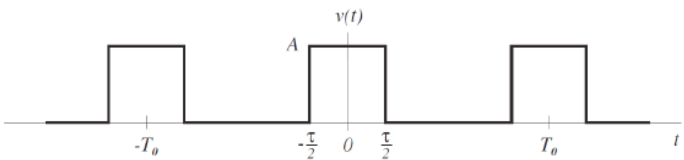







# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

**EXEMPLO DE SINAL PERIÓDICO,** Pulso periódico de duração $\tau$




- Calcular os coeficientes de fourier e o espectro de amplitude do sinal:

$$\boxed{C_n \;=\; \frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt}$$

$$C_n \;=\; \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$C_n \;=\; \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A\, e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$C_n \;=\; \frac{A}{-j2\pi n f_0 T_0}\left(e^{-j\pi n f_0 \tau} - e^{+j\pi n f_0 \tau}\right)$$

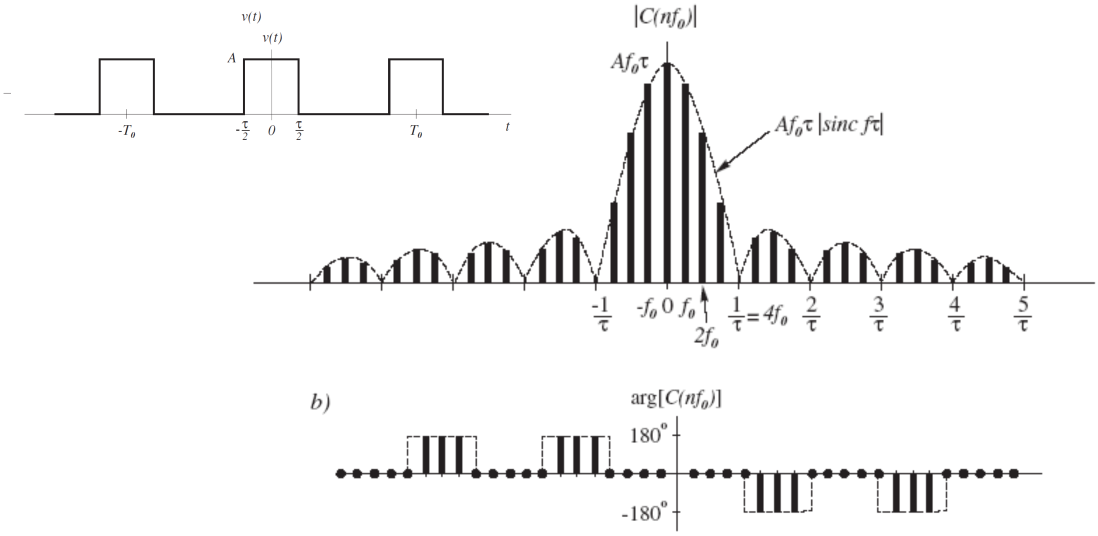
$$C_n \;=\; A f_0 \,\frac{\sin(\pi n f_0 \tau)}{\pi n f_0}$$

....

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

## SINAL PERIÓDICO BÁSICO - Pulso de duração $\tau$

...continuando os cálculos e assumindo $T_0=4\tau$

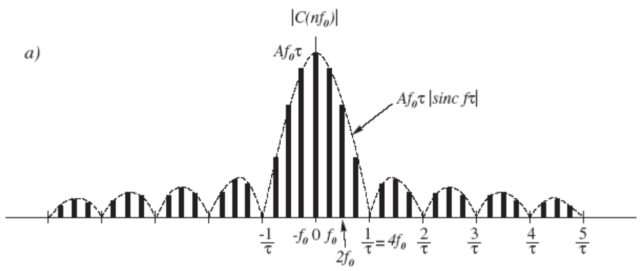





**Fundamentos de Comunicação de Dados**
Licenciatura em Engenharia Informática
Departamento de Informática, Universidade do Minho

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

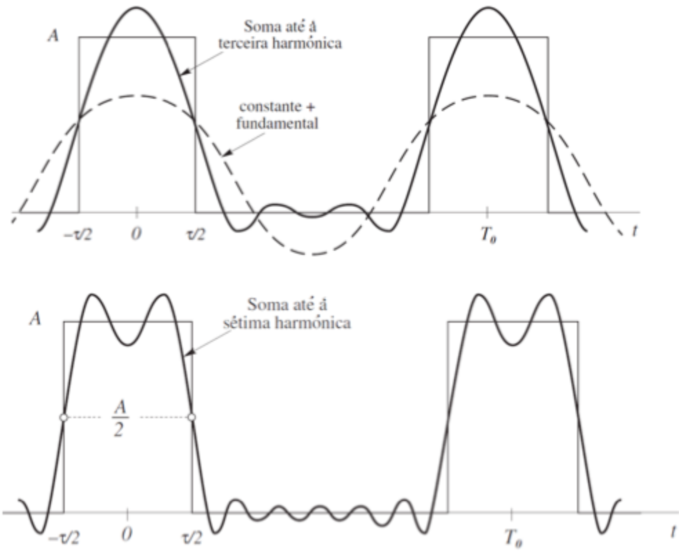
## SINAL PERIÓDICO BÁSICO - Pulso de duração $\tau$




- O que acontece se só forem consideradas algumas componentes do espectro apresentado?
  - as partes do sinal com transições mais "bruscas" são efeito das componentes espectrais nas frequências mais altas

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

## RECONSTRUÇÃO DO SINAL

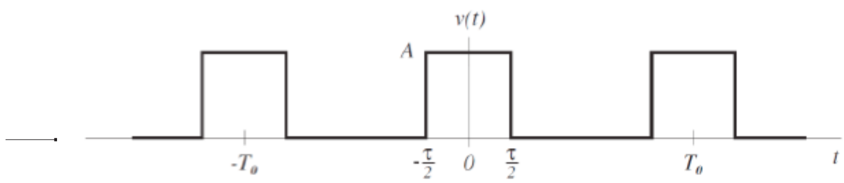





Fundamentos de Comunicação de Dados
Licenciatura em Engenharia Informática
Departamento de Informática, Universidade do Minho

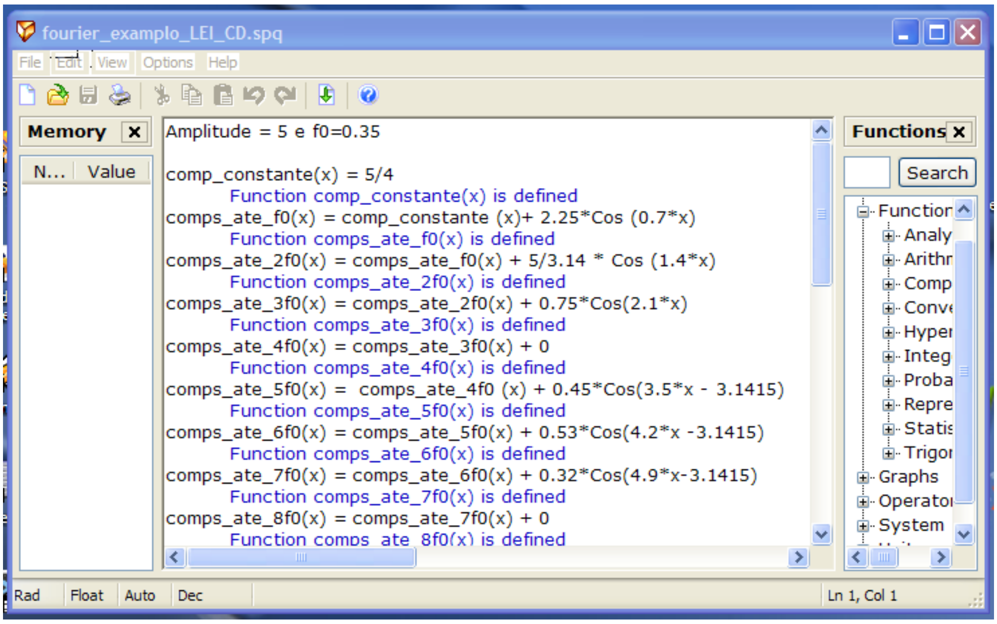
# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

## RECONSTRUÇÃO DO SINAL




confirmar com visualização gráfica

$$C_n = Af_0 \frac{\sin(\pi n f_0 \tau)}{\pi n f_0}$$


fourier_examplo_LEI_CD.spq
File Edit View Options Help
Memory
N... Value
Amplitude = 5 e f0=0.35
comp_constante(x) = 5/4
Function comp_constante(x) is defined
comps_ate_f0(x) = comp_constante (x)+ 2.25*Cos (0.7*x)
Function comps_ate_f0(x) is defined
comps_ate_2f0(x) = comps_ate_f0(x) + 5/3.14 * Cos (1.4*x)
Function comps_ate_2f0(x) is defined
comps_ate_3f0(x) = comps_ate_2f0(x) + 0.75*Cos(2.1*x)
Function comps_ate_3f0(x) is defined
comps_ate_4f0(x) = comps_ate_3f0(x) + 0
Function comps_ate_4f0(x) is defined
comps_ate_5f0(x) = comps_ate_4f0 (x) + 0.45*Cos(3.5*x - 3.1415)
Function comps_ate_5f0(x) is defined
comps_ate_6f0(x) = comps_ate_5f0(x) + 0.53*Cos(4.2*x -3.1415)
Function comps_ate_6f0(x) is defined
comps_ate_7f0(x) = comps_ate_6f0(x) + 0.32*Cos(4.9*x-3.1415)
Function comps_ate_7f0(x) is defined
comps_ate_8f0(x) = comps_ate_7f0(x) + 0
Function comps_ate_8f0(x) is defined
Functions
Search
Graphs
System
Rad Float Auto Dec
Ln 1, Col 1



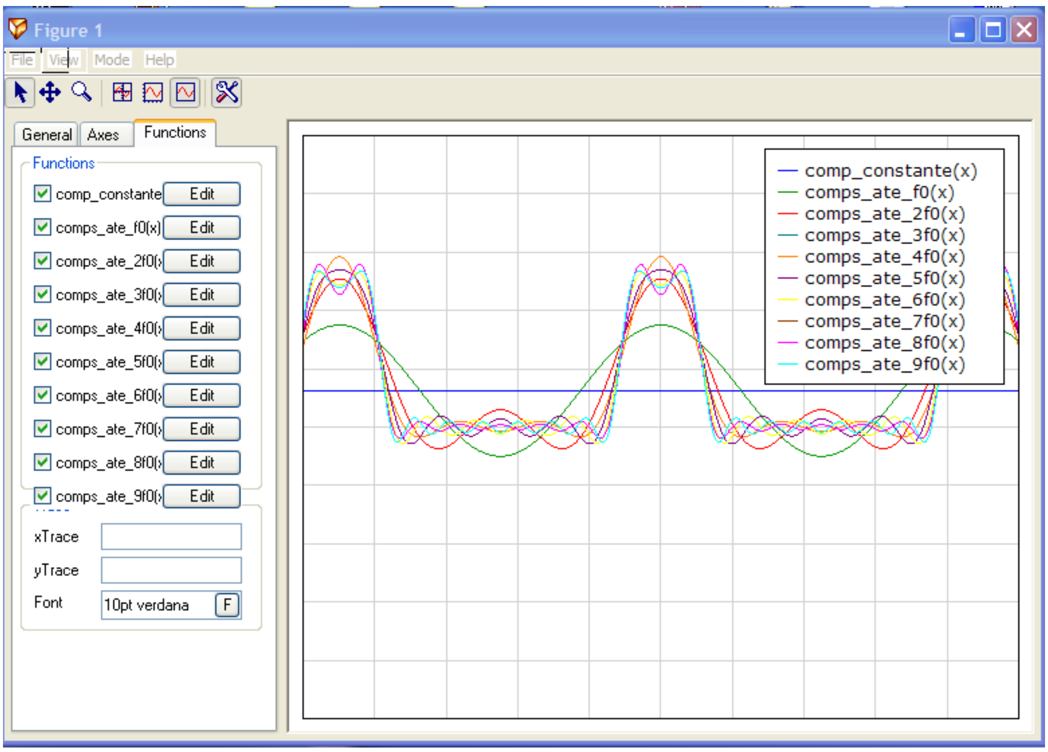


Figure 1
File View Mode Help
General Axes Functions
Functions
comp_constante Edit
comps_ate_f0(x) Edit
comps_ate_2f0( Edit
comps_ate_3f0( Edit
comps_ate_4f0( Edit
comps_ate_5f0( Edit
comps_ate_6f0( Edit
comps_ate_7f0( Edit
comps_ate_8f0( Edit
comps_ate_9f0( Edit
xTrace
yTrace
Font 10pt verdana F
comp_constante(x)
comps_ate_f0(x)
comps_ate_2f0(x)
comps_ate_3f0(x)
comps_ate_4f0(x)
comps_ate_5f0(x)
comps_ate_6f0(x)
comps_ate_7f0(x)
comps_ate_8f0(x)
comps_ate_9f0(x)

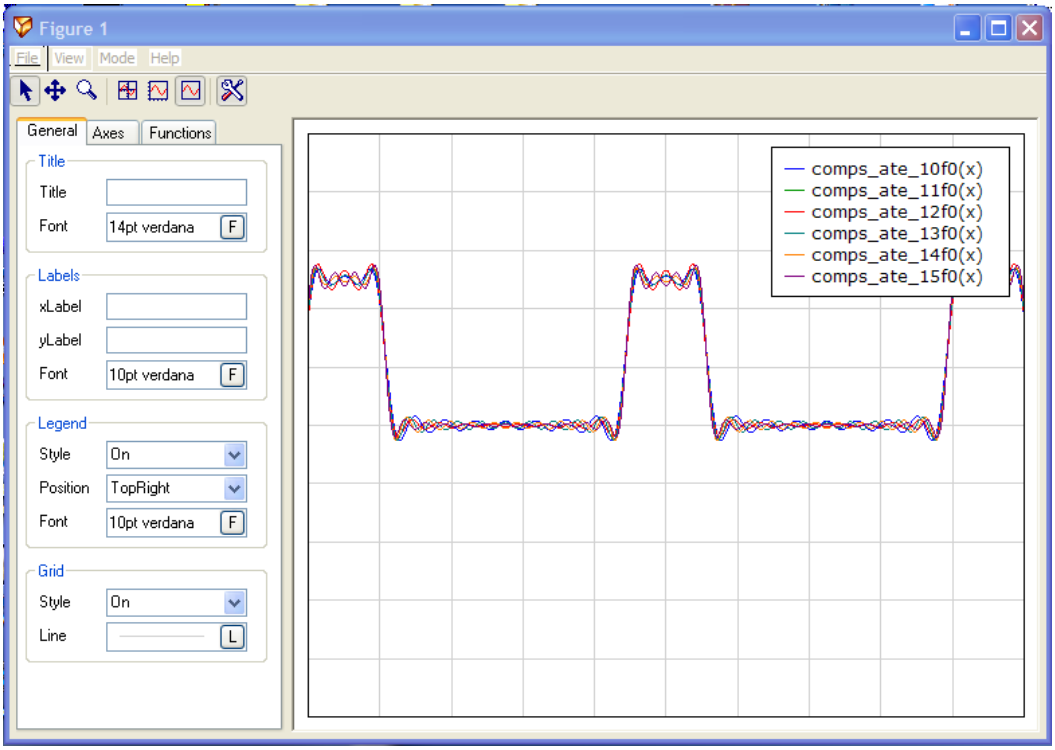


Figure 1
File
View
Mode
Help
General
Axes
Functions
Title
Title
Font
14pt verdana
F
Labels
xLabel
yLabel
Font
10pt verdana
F
Legend
Style
On
Position
TopRight
Font
10pt verdana
F
Grid
Style
On
Line
L
comps_ate_10f0(x)
comps_ate_11f0(x)
comps_ate_12f0(x)
comps_ate_13f0(x)
comps_ate_14f0(x)
comps_ate_15f0(x)



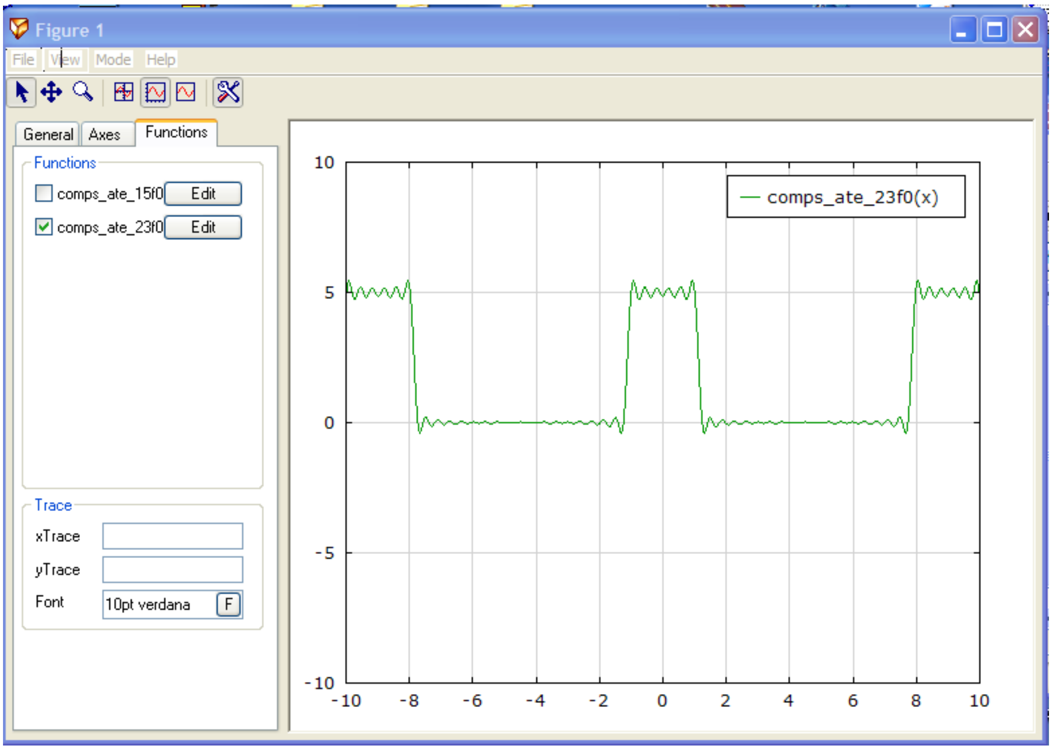
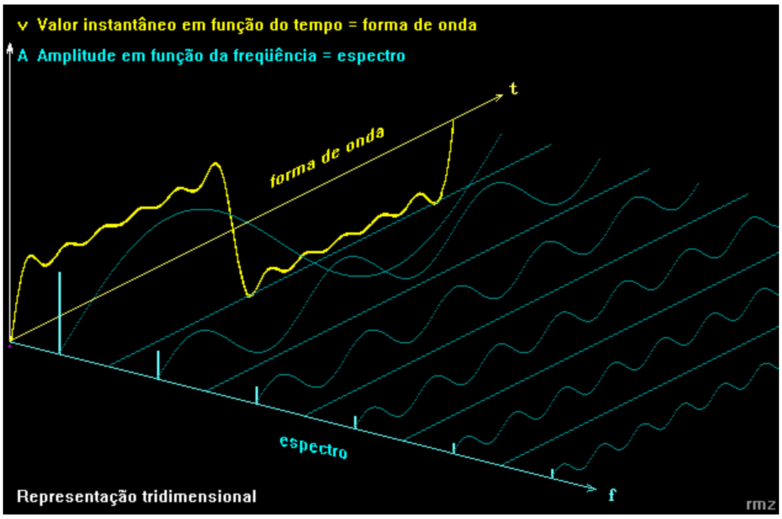


Figure 1
File
View
Mode
Help
General
Axes
Functions
Functions
comps_ate_15f0
Edit
comps_ate_23f0
Edit
Trace
xTrace
yTrace
Font
10pt verdana
F
comps_ate_23f0(x)
10
5
0
-5
-10
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

## ...uma outra representação das compoenentes sinusoidais de um sinal




(aplicação que mostra as componentes espectrais de um determinado sinal)





# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais periódicos)

## TEOREMA DA POTÊNCIA DE PARSEVAL

– Teorema que relaciona a potência média (S) de um sinal periódico com os seus coeficientes de Fourier

**Sinal Periódico com potência média $S$**

*"A potência média de um sinal pode ser determinada quadrando e adicionando os valores $|C(nf_0)|$ das linhas do espectro de amplitude"*

$$\boxed{S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2}$$

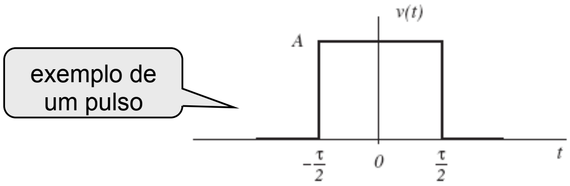
$$S = \langle |v(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t)|^2 \, dt$$

no domínio do tempo

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais não periódicos-*breve referência*)

## SINAIS NÃO PERIÓDICOS - Espectros contínuos

- Se um sinal não periódico possui uma energia total finita e não nula será representado por um espectro contínuo




- Energia normalizada do sinal:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 \, dt$$



**Fundamentos de Comunicação de Dados**
Licenciatura em Engenharia Informática
Departamento de Informática, Universidade do Minho

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais não periódicos-*breve referência*)

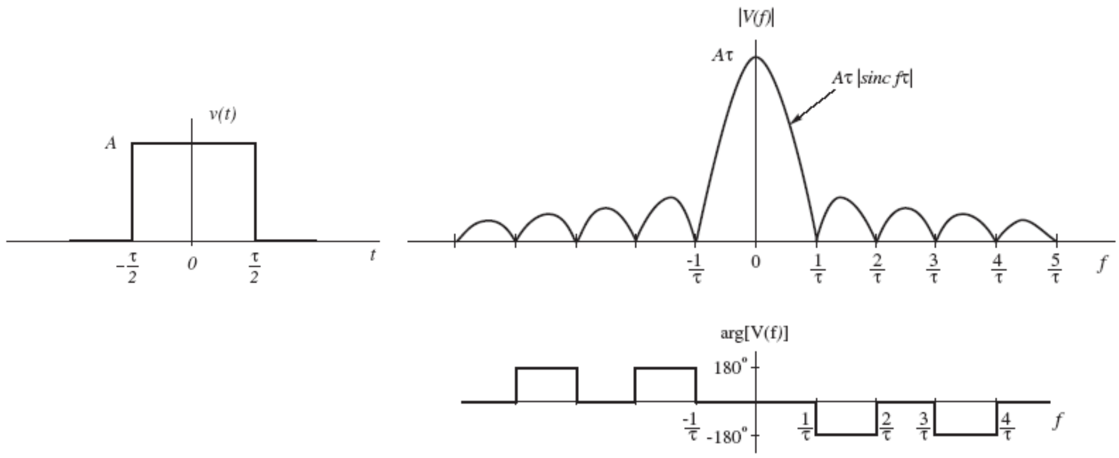
## SINAIS NÃO PERIÓDICOS - Espectros contínuos

- Transformada de Fourier no caso dos sinais não periódicos
  - é dada pela **função *V(f)***
  - representa o espectro do sinal (neste caso um espectro contínuo)

$$V(f) = \mathcal{F}[v(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, e^{-j2\pi f t} \, dt$$

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais não periódicos-*breve referência*)

## SINAIS NÃO PERIÓDICOS - Espectros contínuos






Fundamentos de Comunicação de Dados
Licenciatura em Engenharia Informática
Departamento de Informática, Universidade do Minho

# V. ANÁLISE DE SINAIS (sinais não periódicos-*breve referência*)

## Teorema de Energia (Rayleigh)

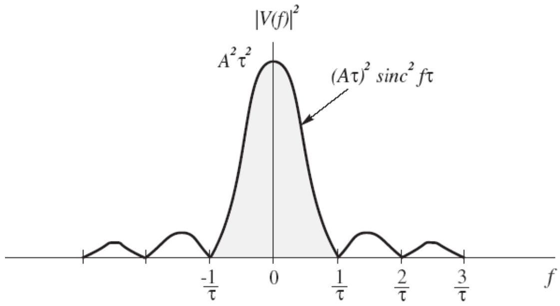
- Tal como o Teorema de Parseval para os sinais periódicos...
- A energia de um sinal não periódico v(t) está relacionada com o seu espectro, V(f), pela seguinte igualdade:

$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{+\infty} |V(f)|^2 \, df}$$

# V. ANÁLISE DE SINAIS

## LARGURA DE BANDA DE UM SINAL

- Relaciona-se com o intervalo de frequência onde está a **maior parte da energia** (ou potência média para os sinais periódicos) do sinal
- Exemplo: sinal com uma energia = $A^2\,\tau$




$$E_{1/\tau} = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{+\frac{1}{\tau}} |V(f)|^2\, df$$

$$E_{1/\tau} = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{+\frac{1}{\tau}} (A\tau)^2 \operatorname{sinc}^2(f\tau)\, df$$

$$E_{1/\tau} = 0.92\, A^2\,\tau$$



**Fundamentos de Comunicação de Dados**
Licenciatura em Engenharia Informática
Departamento de Informática, Universidade do Minho

# V. ANÁLISE DE SINAIS

## LARGURA DE BANDA DE UM SINAL

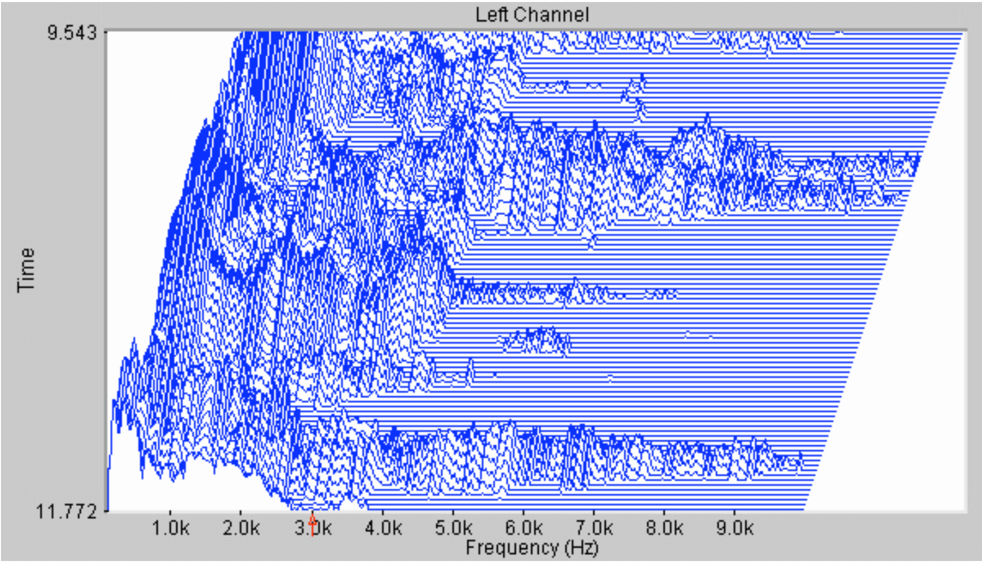
<u>nota:</u> existem outras definições usadas em diferentes contextos

**Definição 2.1 —Largura de Banda de um sinal**
*Largura de Banda, $B$, de um sinal é a amplitude do menor intervalo espectral positivo que contém 90% da energia total do sinal (ou da sua potência média total, caso se trate de um sinal periódico).*

- Como poderá ser utilizado Teorema de Parseval (ou o teorema da energia) para calcular a largura de banda de um sinal?

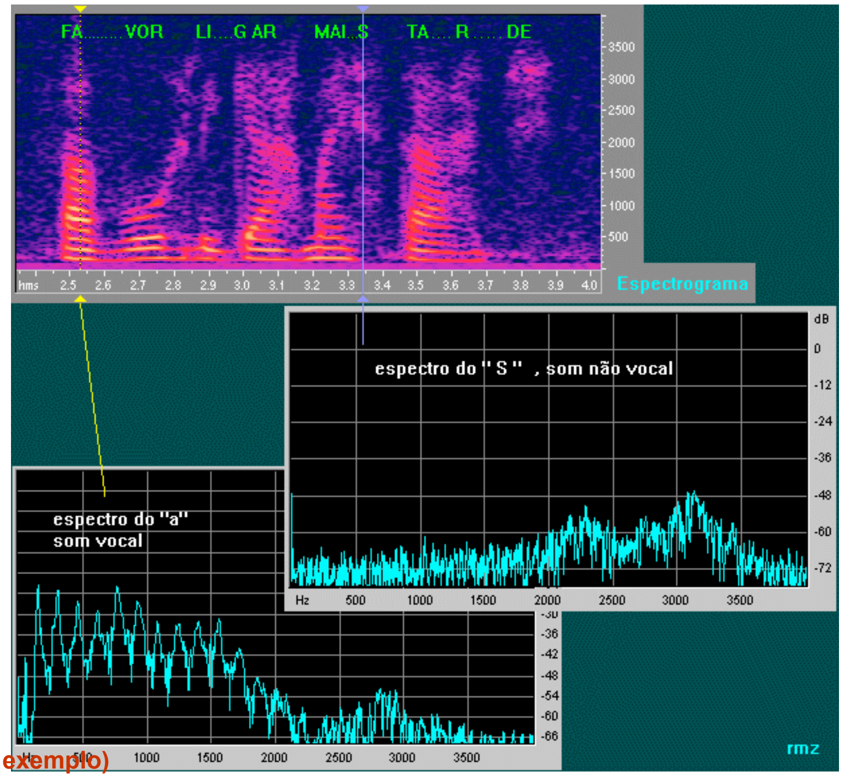
$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

**Espectogramas – representação das características de frequência de  sinais ao longo do tempo**



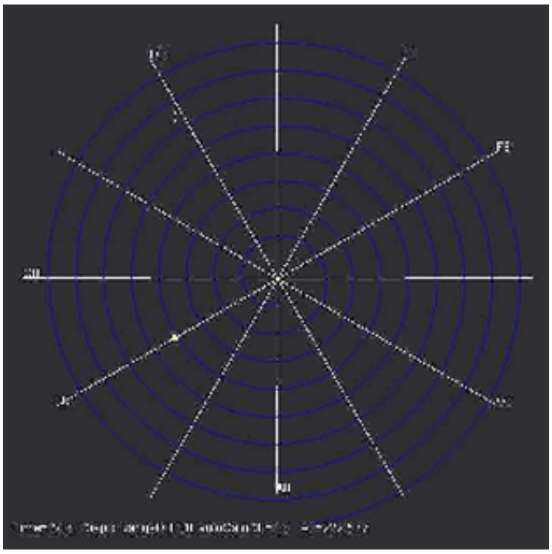



**Espectogramas – representação das características de frequência de sinais ao longo do tempo (outro tipo de representação)**




(ver aplicação exemplo)

**Espectogramas – representação das características de frequência de sinais ao longo do tempo (representação adoptada por um software de análise musical)**







# V. ANÁLISE DE SINAIS

## MODULAÇÃO DE SINAIS

- Analisar as consequências em termos de espectro das operações de modulação
  - modulação em amplitude
  - modulação em frequência

- Qual a relação do espectro do sinal modulante com o sinal após modulação

# V. ANÁLISE DE SINAIS

## MODULAÇÃO DE SINAIS - Modulação em Amplitude

A multiplicação de um sinal $v(t)$ por uma onda sinusoidal dá origem a um novo sinal $v_m(t)$ cujo espectro é o de $v(t)$ transladado na frequência de um valor igual à frequência do sinal sinusoidal.

Seja $v(t) \leftrightarrow V(f)$

$$v(t) \cdot \cos(2\pi f_p t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[V(f-f_p) + V(f+f_p)\right]$$

sinal portador ou portadora, $f_p$ é a frequência da portadora

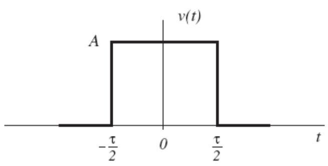
- Sinal modulado em amplitude tem uma **largura de banda** que é o **dobro** da largura de banda do sinal modulante



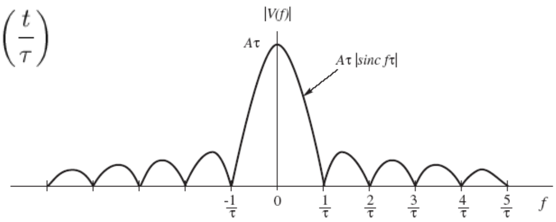
Fundamentos de Comunicação de Dados
Licenciatura em Engenharia Informática
Departamento de Informática, Universidade do Minho

# V. ANÁLISE DE SINAIS

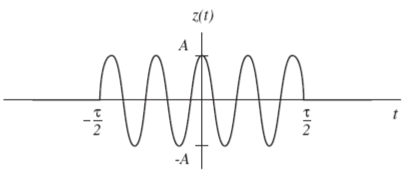
## MODULAÇÃO DE SINAIS - Exemplo de Modulação em Amplitude

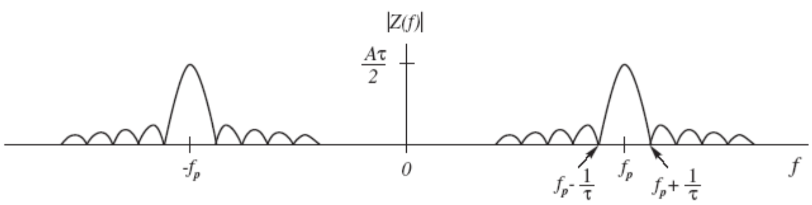



$$v(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$



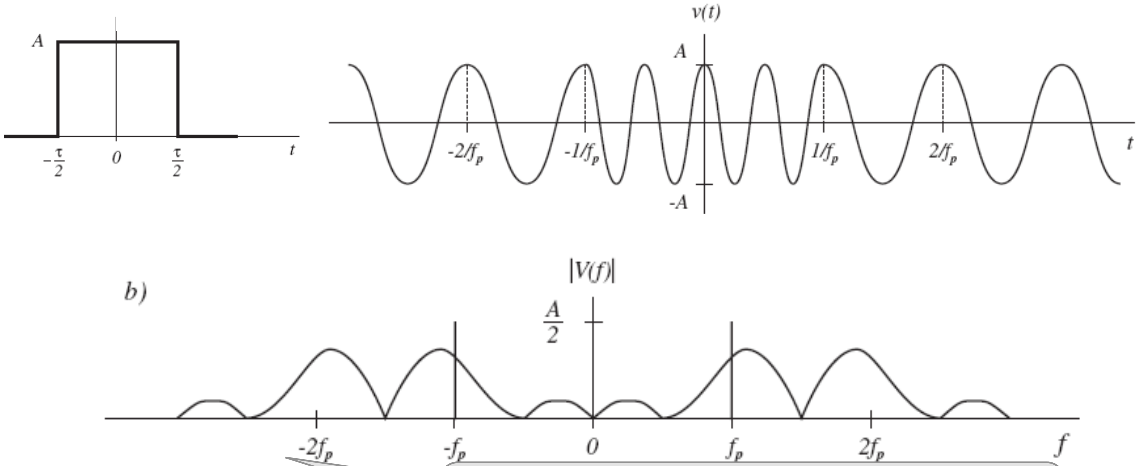

$$z(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \cdot \cos(2\pi f_p t)$$ ?



# V. ANÁLISE DE SINAIS

## MODULAÇÃO DE SINAIS - Exemplo de Modulação em Frequência




Neste exemplo de **modulação em frequência** o sinal modulado tem uma largura de banda que é quatro vezes superior ao do sinal modulante