Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Comunicação de Dados

Ano Letivo 2020/2021 • Teste escrito • 19 janeiro 2021

Duração Total: 100 Minutos

RESOLUÇÃO

1. Considere um ficheiro de texto com os seguintes 100 símbolos (alfabeto com 10 símbolos):
`080000112394456709990374100120404091009192746554040401`
`0177093470403947930477304023497203970239730737`

A1	O valor da entropia deste ficheiro é 2.91 bits/símbolo e a compressão máxima que se poderia obter com um código ideal é de 27% (ou 0.27).
B2	O comprimento médio dos códigos *Shannon-Fano* para este ficheiro, com codificação simples sem blocos, é de 3.08 bits/símbolo. Esta codificação tem um rendimento de 95% (ou 0.95).
C3	Se o ficheiro for codificado através duma codificação simples sem blocos *Shannon-Fano* a sequência binária dos dois primeiros *bytes* seria igual a: `0011111100000000`
D4	Com codificação *Shannon-Fano* por blocos de K símbolos, era possível encontrar um valor de K de tal forma que o comprimento médio do código ($\overline{N}$) fosse inferior a 2.91 dígitos binários por símbolo.

Verdadeiras:	**A1**		**C3**			
Falsas:		**B2**		**D4**		

Contando o número de vezes que cada símbolo *i* aparece obtemos as frequências f_i (com $0 \le i \le 9$). Sabendo que o total de símbolos é de 100, obtemos as probabilidades de cada símbolo $P_i = \frac{f_i}{100}$:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_i	0.27	0.08	0.06	0.11	0.15	0.03	0.02	0.14	0.01	0.13

Calculando a entropia:

$$H_S = \sum_{i=0}^{9} P_i I_i = 0.27 * \log_2\left(\frac{1}{0.27}\right) + 0.08 * \log_2\left(\frac{1}{0.08}\right) + \cdots + 0.13 * \log_2\left(\frac{1}{0.13}\right)$$
$$= 2.91\ bits/símbolo$$

Para calcularmos a compressão máxima precisamos do comprimento do CCFM. Neste caso, o menor valor exponencial de 2, maior ou igual à cardinalidade (10) do ficheiro, é $2^4 = 16$.
Então $N_f = \log_2(16) = 4$ bits.
Logo, a compressão máxima é quando o comprimento médio do código é igual à entropia, ou seja: $c_{max} = (N_f - H_S)/N_f = \frac{4-2.91}{4} = 0.27$ (ou 27%). Assim, conclui-se que A1 é verdadeira.

Calculando os códigos *Shannon-Fano* (SF) sem blocos (ou com um símbolo por bloco, K=1):

simb	freq							Códigos	Ni
0	27	0	0					00	2
4	15	0	1	0				010	3
7	14	0	1	1				011	3
9	13	1	0	0				100	3
3	11	1	0	1				101	3
1	8	1	1	0				110	3
2	6	1	1	1	0			1110	4
5	3	1	1	1	1	0		11110	5
6	2	1	1	1	1	1	0	111110	6
8	1	1	1	1	1	1	1	111111	6

Calculando o comprimento médio dos códigos:

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^{9} P_i N_i = 0.27 * 2 + 0.15 * 3 + \cdots + 0.01 * 6 = 2.94\ bits/símbolo$$

O rendimento seria $\rho = H_S/\bar{N} = \frac{2.91}{2.94} = 0.99$ (ou 99%). Assim, conclui-se que B2 é falsa.

A sequência inicial de símbolos no ficheiro `08000011`… Substituindo os símbolos pelos respetivos códigos obtemos a sequência binária `0011111100000000110110`… Ora, os primeiros 2 *bytes* (ou 16 *bits*) são precisamente `0011111100000000`. Logo, C3 é verdadeira.

Como a entropia já é igual a 2.91 bits/símbolo não é possível encontrar uma codificação SF com um comprimento médio do código inferior a 2.91 bits/símbolo pelo que D4 é falsa.

2. Considere o seguinte sinal periódico *x(t)* (em volts):

$$x(t) = \cos(0\pi t) + 0.8\cos(120\pi t) + 0.4\cos(240\pi t) + 0.2\cos(480\pi t) + 0.1\cos(960\pi t)$$

A1	Trata-se de um sinal com um valor médio de 0.50 volts.
B2	Trata-se de um sinal com uma potência média de 1.33 watts.
C3	Trata-se de um sinal que se repete a cada 60 milissegundos.
D4	Trata-se de um sinal com uma largura de banda de 60 Hz.

Verdadeiras:				**D4**		
Falsas:	**A1**	**B2**	**C3**			

O valor médio do sinal é o valor do coeficiente da componente constante (componente com frequência nula) pelo que no sinal *x(t)* esta componente tem um coeficiente com o valor de 1 volt. Logo, A1 é falsa.

Calculando a potência média usando o teorema de Parceval, temos $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 = C_0^2 + 2 * \sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2$, mas tendo em atenção que a fórmula é para o espectro bilateral:

$$S = 1^2 + 2 * \left[\left(\frac{0.8}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.4}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.2}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.1}{2}\right)^2\right] = 1 + 2 * (0.4^2 + 0.2^2 + 0.1^2 + 0.05^2) = 1.43\ \text{W}$$

Logo, B2 é falsa.

Sabendo que o período é o inverso da frequência fundamental e que a frequência fundamental é a frequência do primeiro componente com a frequência não nula, então, neste caso, a componente da frequência fundamental é a frequência da componente $0.8\cos(120\pi t)$, pelo que $120\pi t = 2\pi n f_0 t$, com $n = 1$.

Então conclui-se que $f_0 = \frac{120}{2} = 60$ Hz e $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{60} = 16.7$ milissegundos.

Portanto, C3 é falsa.

Calculando 90% da potência média do sinal obtemos $0.9 * S = 0.9 * 1.43 = 1.29$ watts. Identificando cada um dos componentes no espectro bilateral e somando a potência de cada componente até atingir 1.29 watts:

$C_0 = 1, C_1 = 0.4, C_2 = 0.2, C_3 = 0, C_4 = 0.1, C_{5,6,7} = 0, C_8 = 0.05$

$S_0 = 1$ watt

$S_{0,1} = S_0 + S_1 = 1 + 2 * C_1^2 = 1 + 2 * 0.4^2 = 1.32$ watts

Como a largura de banda do sinal é o intervalo entre a primeira componente com o coeficiente não nulo e a componente que permite atingir 90% ou mais da potência do sinal, neste caso, $B = [0, f_0] = 60$ Hz.

Logo, D4 é verdadeira.

3. Um sistema de transmissão possui um conversor AD para poder transmitir um sinal analógico de 1 Watt de potência média numa linha digital de transmissão com uma constante de densidade de potência do ruído térmico/Gaussiano igual a 10^{-10} Watt/Hz. O sinal analógico para transmissão tem uma largura de banda de 1 KHz e o canal digital de transmissão tem uma largura de banda máxima de 10 KHz.

A1	Se a conversão AD precisar de ter uma qualidade tal que a relação entre a potência do sinal e a potência do ruído de quantização seja de, pelo menos, 100 dB, então o número de níveis quânticos da quantização uniforme tem de ser, no mínimo, de 57735.
B2	Nas mesmas condições de A1, o número de dígitos digitais por amostra pode ser igual a 8 quando a base de numeração dos símbolos digitais é 4.
C3	Independentemente da qualidade da digitalização, o recetor no destino da linha digital de transmissão nunca poderá receber um ritmo binário superior a 20 Kbps.
D4	Considere que em vez da transmissão do sinal digitalizado é necessário armazenar os dados localmente à saída do conversor AD. Se a conversão for feita em símbolos binários e a relação entre a potência do sinal e a potência do ruído de quantização for 100 dB então seriam necessários 117 Kbytes/minuto.

Verdadeiras:	**A1**	**B2**				
Falsas:			**C3**	**D4**		

Para uma qualidade da digitalização tal que $\left(\frac{S}{N_q}\right)_{dB} \geq 100\ dB$, se S = 1 Watt, então $\left(\frac{1}{N_q}\right)_{dB} \geq 100$, ou seja, $\frac{1}{N_q} \geq 10^{100*10^{-1}} = 10^{10} \Leftrightarrow N_q \leq 10^{-10}$ Watts. Daqui retira-se o valor mínimo de níveis quânticos: $N_q \leq 10^{-10}, N_q = \frac{1}{3*q^2} \rightarrow\ 10^{-10} \geq \frac{1}{3*q^2} \Leftrightarrow q^2 \geq \frac{10^{10}}{3} \Leftrightarrow q \geq 57735$

Logo, A1 é verdadeira.

O ruído Gaussiano do canal é $N = \eta * B_T = 10^{-10} * 10^4 = 10^{-6}$ Watts

Calculando a capacidade do canal: $C = B_T * \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) = 10^4 * \log_2\left(1 + \frac{1}{10^{-6}}\right) = 199320\ bps$

Por outro lado, o ritmo máximo de *Nyquist* é: $r_S \leq 2 * B_T = 20000\ símbolos/seg$

Logo, não poderemos ter na linha um ritmo de símbolos digitais acima de 20000 por segundo nem um ritmo de informação equivalente superior a 199320 bps.

Sabendo que o sinal analógico a digitalizar tem uma largura de banda de 10 KHz então a digitalização vai gerar um ritmo de símbolos digitais que não pode exceder r_S, ou seja, $r_c = K * f_a \leq r_S$.

Como $f_a \geq 2 * B = 2 * 10^3$ Hz, então $K * f_a \leq r_S \Leftrightarrow K \leq \frac{2*10^4}{2*10^3} = 10$ símbolos digitais.

Por outro lado, para manter a qualidade da digitalização requerida, o número de símbolos digitais mínimo é dado por $K = int[\log_M q]$ pelo que $K \geq int[\log_M 57735]$ em que a base de numeração dos símbolos digitais é dada por $M = 2^n$.

Testando, temos $n = 1 \rightarrow M = 2 \rightarrow K \geq int[\log_2 57735] \geq 16$ o que ultrapassa o limiar de $K \leq 10$ calculado anteriormente. Para $n = 2 \rightarrow M = 4 \rightarrow K \geq int[\log_4 57735] \geq 8$, que já está dentro do limiar anteriormente calculado. Neste caso, cada símbolo digital representa o equivalente a dois bits de informação ($n = 2$). Com $K = 8$ o ritmo vem $r_c = 8 * 2 * 10^3 = 16000$ símb/seg, que está abaixo do limite teórico de 20000 símb/seg, e o ritmo de informação gerado é de $n * r_c = 32000\ bps$ que também está abaixo da capacidade máxima teórica do canal. Logo, a solução com $M = 4,\ K = 8$ é válida e B2 é verdadeira.

O ritmo binário máximo de informação que a linha de transmissão permite é de 199320, ou 199 Kpbs. Ora este ritmo ainda é muito acima de 20 Kbps, pelo que C3 é falsa.

Se for apenas necessário armazenar os dados resultantes da digitalização e a conversão for feita em símbolos binários então já vimos que $n = 1 \rightarrow M = 2 \rightarrow K = 16$.

Então $r_c = K * f_a = 16 * 2 * 10^3 = 32\ Kbps$.

Ora, num minuto teremos de guardar $\frac{32*10^3*60}{1024*8} = 234$ Kbytes.

Logo, D4 é falsa.

4. Oito terminais estão ligados a um multiplexador que pode ser modelado através do modelo M/D/1/K. O ritmo binário para todos os terminais é o mesmo, mas a taxa de ocupação dos terminais é diferente para todos e múltipla de α_{min}. A taxa de ocupação do terminal com menor ritmo binário médio é α_{min} e a taxa de ocupação do terminal com maior ritmo binário médio é de $8 * \alpha_{min}$. O comprimento das mensagens é de 60 *bits* e a linha de saída do multiplexador transmite ao ritmo de 100 mensagens por segundo. O rendimento da linha de saída é de 60%.

A1	Se o ritmo binário de entrada for 1 Kbps então α_{min} é igual a 5% (ou 0.05).
B2	Se o ritmo binário de entrada for 1 Kbps então o tempo médio de atraso duma mensagem no multiplexador é de 17.5 milissegundos.
C3	Se o tamanho do *buffer* do multiplexador for de 1200 *bits* então a probabilidade de acontecer a sobrelotação do *buffer* é menor que uma em mil milhões.
D4	Para um rendimento de 60%, se o tamanho das mensagens e o ritmo da linha de saída forem constantes então o atraso médio duma mensagem no *buffer* (ou fila de espera) também é constante.

Verdadeiras:		**B2**	**C3**	**D4**		
Falsas:	**A1**					

Sabendo que $\rho = \frac{1}{r_{bs}} * \sum_{i=1}^{8}(\alpha_i * r_{be_i})$, $r_{bs} = 100 * K = 6000\ bps$ e que todos os ritmos de entrada são iguais, então $0.6 = \frac{r_{be}}{6000} * \sum_{i=1}^{8} \alpha_i \Leftrightarrow \frac{3600}{r_{be}} = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i$.
Por outro lado $\sum_{i=1}^{8} \alpha_i = \alpha_{min} + 2 * \alpha_{min} + \cdots + 8 * \alpha_{min} = \alpha_{min} * \sum_{i=1}^{8} i = \alpha_{min} * 36$,
então $\frac{3600}{r_{be}} = \alpha_{min} * 36 \Leftrightarrow \alpha_{min} = \frac{100}{r_{be}}$, pelo que $r_{be} = 10^3 \rightarrow \alpha_{min} = \frac{100}{1000} = 0.1$ (10%).
Logo, A1 é falsa.

Sabendo que o tempo médio de atraso duma mensagem no multiplexador é $\bar{t}_q = \bar{S} * [1 + \frac{\rho}{2*(1-\rho)}]$ e que $\bar{S} = \frac{K}{r_{bs}} = \frac{60}{6000}$ então $\bar{t}_q = \frac{60}{6000} * \left(1 + \frac{0.6}{2*(1-0.6)}\right) = 10^{-2} * \left(1 + \frac{0.6}{0.8}\right) = 17.5$ milissegundos.
Logo, B2 é verdadeira. Neste exercício, o tempo médio de atraso duma mensagem no multiplexador é independente do ritmo binário de entrada.

Num buffer de 1200 *bits* cabem $\frac{1200}{60} = 20$ mensagens (ou DUs). Analisando a linha do rendimento a 60% (ou 0.6) no gráfico da probabilidade de sobrelotação, podemos concluir que a linha do rendimento irá intercetar a linha vertical das 20 mensagens num valor de probabilidade de sobrelotação abaixo de 10^{-9} ou uma em mil milhões.
Logo C3 é verdadeira.

Se o tamanho das mensagens e ritmo de saída for constante então o tempo de serviço é constante. Se o rendimento e o tempo de serviço forem constantes o atraso médio duma mensagem no buffer (ou fila de espera) também é constante.
Logo, D4 é verdadeira.

5. Considere um sistema de transmissão possuindo a seguinte função de transferência:

$$H(f\ ) = \frac{\sqrt{512}}{16 + j * \left(\frac{f - 2 * 10^4}{10^4}\right)^4}$$

A1	Este sistema tem uma largura de banda de $B_T = 10\ KHz$.
B2	Este sistema pode ser classificado como amplificador.
C3	A potência da componente constante do sinal *x(t)* do exercício 2 não irá sofrer qualquer alteração quando transmitido no sistema com esta função de transferência.
D4	Trata-se dum sistema de transmissão equivalente a um filtro *Butterworth* passa-baixo de quarta ordem.

Verdadeiras:		**B2**	**C3**	**D4**		
Falsas:	**A1**					

Considerando a fórmula genérica dum filtro *Butterworth*:

$$H(f) = \frac{K}{1 + j * \left(\frac{f - f_\phi}{f_s - f_\phi}\right)^n}$$

Será necessário simplificar a função de transferência:

$$H(f\ ) = \frac{\sqrt{512}}{16 + j * \left(\frac{f - 2 * 10^4}{10^4}\right)^4} = \frac{\sqrt{\frac{512}{16^2}}}{1 + \frac{j}{16} * \left(\frac{f - 2 * 10^4}{10^4}\right)^4} = \frac{\sqrt{\frac{512}{256}}}{1 + \frac{j}{2^4} * \left(\frac{f - 2 * 10^4}{10^4}\right)^4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1 + j * \left(\frac{f - 2 * 10^4}{2 * 10^4}\right)^4}$$

Temos então que:

$$n = 4, K = \sqrt{2}, f_\phi = 2 * 10^4\ Hz, f_s - f_\phi = 2 * 10^4 \Leftrightarrow f_s = 4 * 10^4\ Hz, f_i = 2 * f_\phi - f_s = 0\ Hz$$

Pelo que $B_T = [f_i, f_s]_+ = [0, 4 * 10^4] = 4 * 10^4 = 40\ KHz$.
Logo, A1 é falsa.

Como $K = \sqrt{2} > 1$, então trata-se de um sistema amplificador.
Logo, B2 é verdadeira.

Como $f_i = 0\ Hz$ então $|H(f_i)|^2 = |H(0)|^2 = \frac{K^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$, ou seja, a potência duma componente/sinusoidal dum sinal com frequência igual a zero será multiplicado por 1, ou seja, ficará inalterada.
Logo, C3 é verdadeira.

Como $n = 4$ então é um filtro *Butterworth* de quarta ordem. Como, $f_i \leq 0$ e $f_s < +\infty$, então é um filtro passa-baixo.
Logo, D4 é verdadeira.