Física Moderna Apontamentos

AULA 1

[C1] PARA LOCALIZAR EVENTOS NO ESPAÇO-TEMPO PRECISAMOS DE REFERENCIAIS

[C2] NA FÍSICA UTILIZAMOS UM SISTEMA DE

EIXOS CARTESIANOS: DEFINIDOS POR UMA ORIGEM E 3 DIREÇÕES $\perp$ ENTRE SI QUE DESIGNAMOS POR (X, Y, Z)

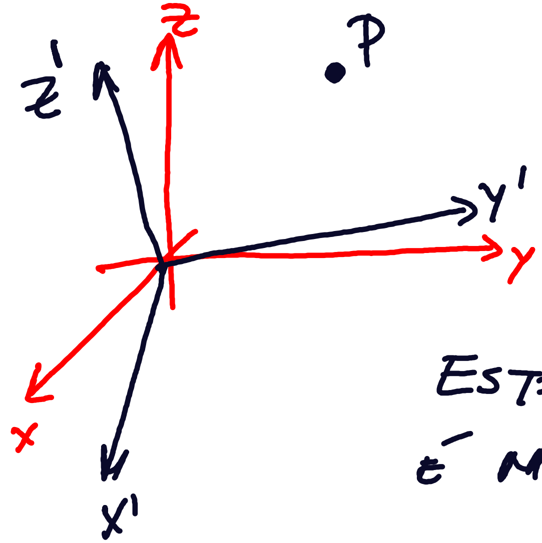
(X, Y, Z) A ESTE SISTEMA DE EIXOS CHAMAMOS REFERENCIAL

(t) [MAS PRECISAMOS DE UMA DIMENSÃO DE TEMPO PARA LOCALIZAR EVENTOS]

[C3] NA MECÂNICA CLÁSSICA t É UM INVARIANTE

AS COORDENADAS SÃO RELATIVAS: DEPENDEM DO REFERENCIAL

[C4] $\exists$ qualquer coisa de "absoluto" com o ponto P



$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$d' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

Este conceito de invariante é muito importante em física

1 dim: $d = \sqrt{x^2} = x$

2 dim: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

3 dim: $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

e com o tempo ?

[C5] "A grande novidade de teoria da relatividade restrita" é a unidade do espaço-tempo

Esta unidade sugere o uso das unidades naturais (espaço e tempo tem as mesmas unidades)

Wondershare PDFelement

UNIDADES NATURAIS

[$c = 3\times 10^8$ m/s] mas nestas unidades $c=1$ é a velocidade de referencia

$$v = \frac{v_{convencional}}{c}$$

$\boxed{\text{por ex. um fotão que viaja à velocidade da luz possui } v = \frac{c}{c} = 1}$

[C6] Se v não tem unidade a distancia e o tempo têm de ser dadas nas mesmas unidades

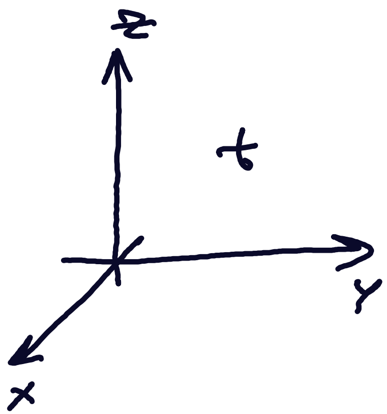
O que significa: <u>a minha idade medida em metros?</u>

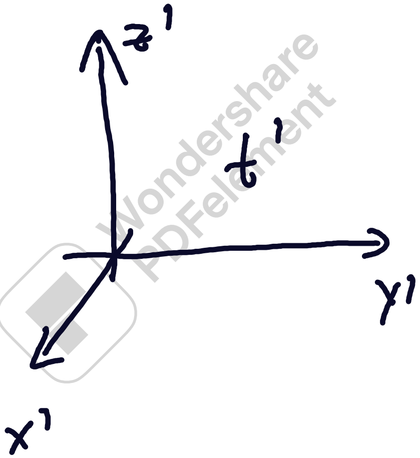
<u>significa:</u> a distância (em m) que a luz percorre num intervalo de tempo <u>igual à minha idade.</u>

O que significa: <u>a minha altura em segundos?</u>

significa: o intervalo de tempo que a luz demora a percorrer a minha altura.

Porquê a Vel. da Luz c? Por ser a velocidade limite de qualquer partícula ou sistema





Vamos Definir. INTERVALO ESPAÇO TEMPO:

$$s = \sqrt{t^2 - x^2 - y^2 - z^2} = \sqrt{t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2}$$

(t, x, y, z) (t', x', y', z')

São quadri-vetores (ou 4-vetores)

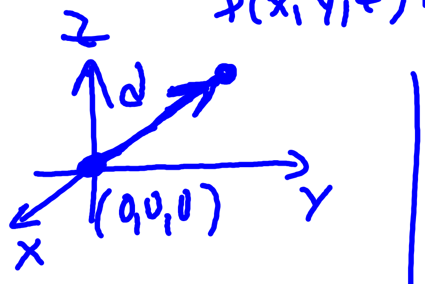
LEMBRAM-SE DO QUE DISSE ATRÁS PARA OS INVARIANTES?

1D: $s = x = \sqrt{x^2}$

2D: $s = \sqrt{x^2+y^2}$

3D: $s = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

4D: $s = \sqrt{t^2-x^2-y^2-z^2}$ porquê?



Imaginem um feixe de luz que percorre

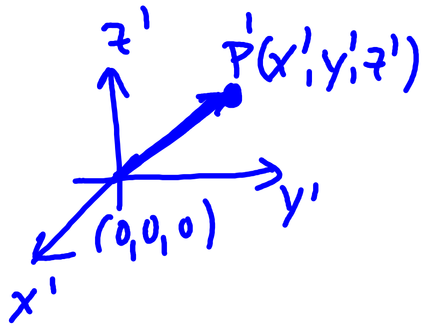
$$c = \frac{d}{t} \qquad ct = d \rightsquigarrow c = 1$$

$$t = d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\longrightarrow t^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$t^2-x^2-y^2-z^2 = 0 = c^{te} \text{ invariante.}$$

$\longrightarrow$ mas em



$$ct' = d' \longrightarrow t' = d'$$

$$t' - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^{te}$$

Pagina 5

$(t', x') = (0,0)$

joana

$\vec{v}$

$(t', x') = (t', 0)$

joana

$\vec{v}$

1) JOANA SEGUE NUM SUPER CARRO

2) PASSA pelo João E começam a contar o tempo

3) O JOÃO VÊ O CARRO a passar ao lado de um poste e pára o tempo

A Joana faz o mesmo!

João

$(t, x) = (0,0)$

evento 1

(t, x)

poste! João para o tempo e a Joana também

evento 2 (poste)

Vamos considerar o intervalo ESPAÇO-TEMPO introduzido

$$s'^2 = t'^2 - x'^2 = t'^2 = s^2 = t^2 - x^2 \qquad (1)$$

mas o João vê o carro a mover-se com velocidade

$$v = x/t \Rightarrow x = vt \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) vem $s^2 = t^2 - v^2 t^2 = (1 - v^2) t^2$

$$t'^2 = (1 - v^2) t^2$$

$$\xrightarrow{2} \boxed{t = \frac{t'}{\sqrt{1 - v^2}}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \qquad t = \gamma t'$$

$\hookrightarrow$ tempo próprio

mas $V \leq 1$!

Por ex. $V = 0.7$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-0.7^2}} t' = 1.40\, t'$$

ou seja no referencial (t,x) o tempo é maior que no referencial (t',x') $\Longrightarrow$ DILATAÇÃO DOS TEMPOS

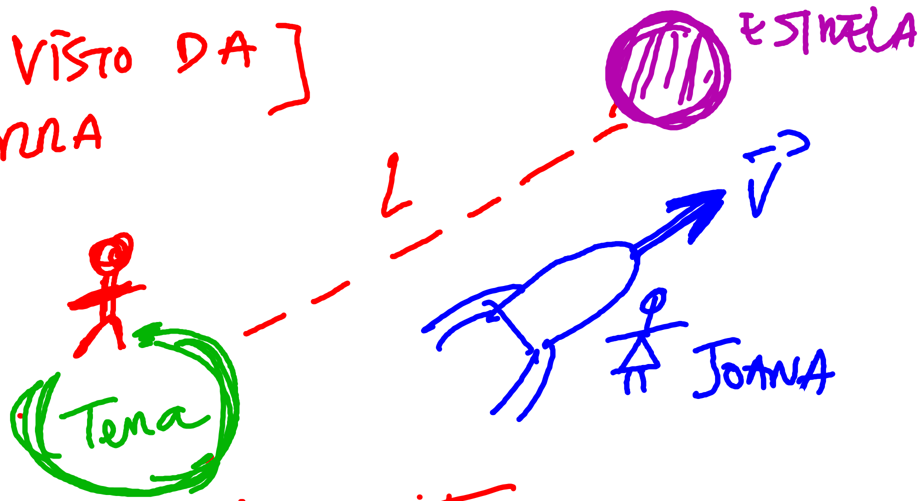
E se a Joana for à velocidade da luz?

$t' = t\sqrt{1-v^2} \equiv t\sqrt{1-1} = 0$! ou seja o tempo não passa, para a Joana

PARA A LUZ O TEMPO ~~N~~ PASSA $\Longleftarrow$ INDEPENDENTEMENTE DO TEMPO QUE PASSOU PARA O JOÃO

PÁGINA 6 [NÃO USAR O EXEMPLO DO LIVRO]

[VISTO DA TERRA]



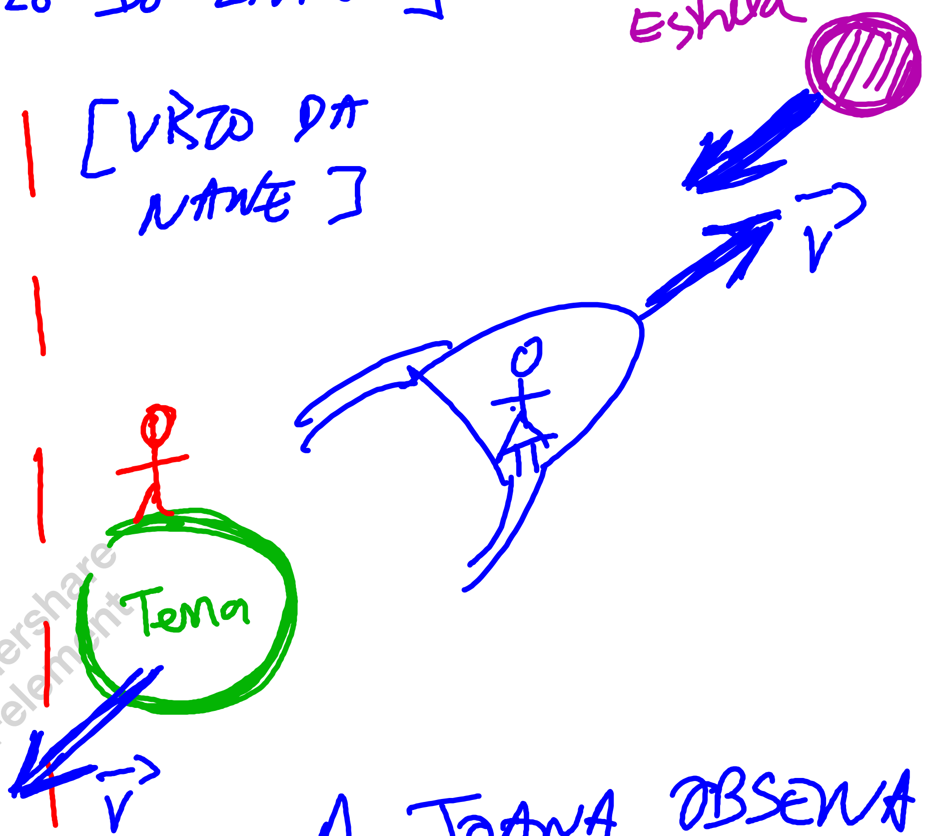
O João está na Terra e observa a nave da Joana em direção à estrela

L = comprimento em repouso

$$v = \frac{L}{t}$$

O João vê o comprimento em repouso "comprimento próprio"

[VISTO DA NAVE]



A Joana observa a Terra a afastar-se e a Estrela a aproximar-se

$$v = \frac{L'}{t'} \qquad t = t'\gamma$$

$$\frac{L}{t} = \frac{L'}{t'} \Leftrightarrow \frac{L}{L'} = \frac{t}{t'} = \gamma$$

$$L = L'\gamma$$

$$2 \longrightarrow L' = L/\gamma$$

OU SEJA A JOANA VÊ UM COMPRIMENTO MENOR

$\Longrightarrow$ CONTRAÇÃO DOS COMPRIMENTOS

EVENTOS QUE SÃO SIMULTÂNEOS NUM REFERENCIAL PODEM NÃO SER NOUTRO.

SIMULTANEIDADE É RELATIVA !!

PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE:

AS LEIS FÍSICAS SÃO AS MESMAS EM TODOS OS REFERENCIAIS INERCIAIS.

REFERENCIAL INERCIAL:

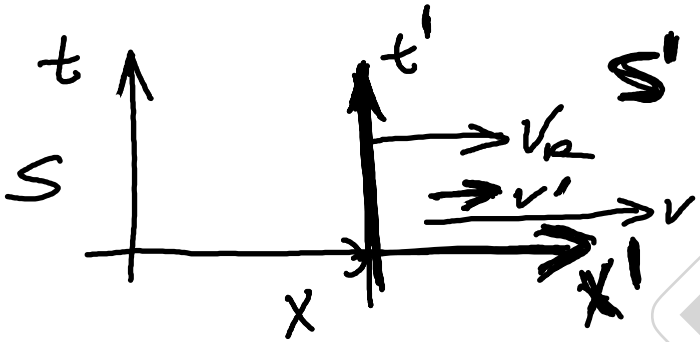
Newton "REFERENCIAL EM QUE UM OBJECTO PARADO PERMANECE PARADO E UM OBJECTO EM MOVIMENTO UNIFORME PERMANECE UNIFORME."

→ (NEWTON) Ref. Inercial ≡ Ref. não ACELERADO!

RELATIVIDADE // COM A RELATIVIDADE RESTRITA ESTE CONCEITO TEVE DE SER ALARGADO: UM REF. EM QUEDA LIVRE

NUM CAMPO GRAVÍTICO É TAMBEM UM REF. INERCIAL."

VELOCIDADE NO ESPAÇO-TEMPO



S' desloca-se com uma velocidade V_R em relação a S

(S) $v = \frac{x}{t}$ (S') $v' = \frac{x'}{t'}$

NA FÍSICA DE NEWTON: $v = v' + V_R$ NÃO É MAIS VÁLIDO

NA RELATIVIDADE $\boxed{v = \frac{v' + V_R}{1 + V_R v'}}$

$$v = \frac{v' + V_R}{1 + V_R v'}$$

como $v' \le 1$ $V_R \le 1$

$$v \le 1$$

1 $\Rightarrow$ a eq. garante que nenhum objeto pode ultrapassar a velocidade da luz

2 SE UM SISTEMA OU PARTÍCULA SE DESLOCA À VELOCIDADE DA LUZ NUM REFERENCIAL ENTÃO VAI A ESSA VELOCIDADE EM RELAÇÃO A $\forall$ OUTRO i.e.,

SE $v' = 1$

$$v = \frac{1 + V_R}{1 + V_R \cdot 1} = 1 \;//$$

Momento - Energia

AULA 2

c1] NA FÍSICA DE NEWTON NORMALMENTE ASSOCIAMOS A ENERGIA À ENERGIA CINÉTICA: $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

Momento (ou quantidade de movimento) $\vec{p} = m \vec{v}$

c2] NA RELATIVIDADE RESTRITA: QUADRI-VETOR (E, P_x, P_y, P_z)

QUE É UM INVARIANTE: (E', P'_x, P'_y, P'_z)

O MÓDULO DO 4-vetor: $m^2 = E^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2$

$$m = \sqrt{E^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2}$$

C3] A massa de uma Partícula ou Sistema:

$$m = \sqrt{E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2} = \sqrt{E'^2 - p_x'^2 - p_y'^2 - p_z'^2} = m'$$

É IGUAL EM TODOS OS SISTEMAS DE REFERÊNCIA !!!

C4] No REFERENCIAL EM QUE A PARTÍCULA ESTÁ EM REPOUSO:

$$p_x' = 0 \quad p_y' = 0 \quad p_z' = 0 \implies m' = m = E$$

massa = Energia em Repouso!!

C5] ENERGIA CINÉTICA:

$$E_c = E - m$$

velocidade: $v = P/E$

C6] SE A PARTÍCULA NÃO TEM MASSA:

$$E = P \implies v = 1$$

C7] CONCEITO MUITO IMPORTANTE: MASSA DE UM SISTEMA

$$(E_1, P_{x_1}, P_{y_1}, P_{z_1}) \quad e \quad (E_2, P_{x_2}, P_{y_2}, P_{z_2})$$

$$m_1 = \sqrt{E_1^2 - P_{x_1}^2 - P_{y_1}^2 - P_{z_1}^2} \qquad m_2 = \sqrt{E_2^2 - P_{x_2}^2 - P_{y_2}^2 - P_{z_2}^2}$$

sistema $1 + 2 = (E_1 + E_2, P_{x_1} + P_{x_2}, P_{y_1} + P_{y_2}, P_{z_1} + P_{z_2})$

$$M = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (P_{x_1} + P_{x_2})^2 - (P_{y_1} + P_{y_2})^2 - (P_{z_1} + P_{z_2})^2}$$

C8] SISTEMA DE 2 γ's

γ_1 $(E, E, 0, 0)$

γ_2 $(E, 0, E, 0)$

γ_1: $m_1 = \sqrt{E^2 - E^2} = 0$

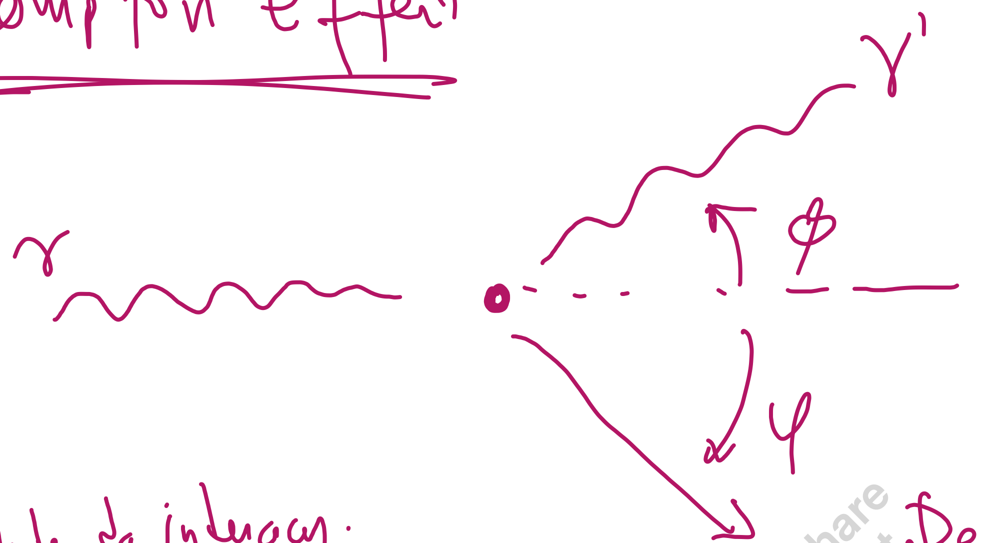
γ_2: $m_2 = \sqrt{E^2 - E^2} = 0$

Os fotões têm massa zero!!

$\gamma_1 + \gamma_2$: $M = \sqrt{4E^2 - E^2 - E^2} = \sqrt{2}\,E \neq 0$

e a massa de 1 protão? De onde vem?

[9] Compton Effect



Antes da interação:

$\gamma : (E, E, 0, 0)$

$e^- : (m, 0, 0, 0)$

Depois da interação:

$\gamma' : (E', E'\cos\phi, E'\sin\phi, 0)$

$e' : (E_e, P_e\cos\psi, P_e\sin\psi, 0)$

$$\underbrace{(E+m, E, 0, 0)} = \underbrace{(E'+E_e, E'\cos\phi + P_e\cos\psi, E'\sin\phi + P_e\sin\psi, 0)}$$

$$E + m = E' + E_e \qquad E = E'\cos\phi + P_e\cos\psi \qquad 0 = E'\sin\phi + P_e\sin\psi$$

$$m^2 = E_e^2 - P_e^2 \rightsquigarrow P_e^2 = E_e^2 - m^2$$

$$E_e = E - E' + m$$

$$E - E'\cos\phi = P_e \cos\varphi$$

$$E'\sin\phi = -P_e \sin\varphi$$

$\left[P_e^2 \right.$ Sonar $\left. \right]$

$$(E - E'\cos\phi)^2 + (E'\sin\phi)^2 = P_e^2$$

$$E^2 - 2EE'\cos\phi + (E')^2 = P_e^2$$

$$= E_e^2 - m^2$$

$$E^2 - 2EE'\cos\phi + (E')^2 = (E - E' + m)^2 - m^2 \iff$$

$$\cancel{E^2} - 2EE'\cos\phi + \cancel{(E')^2} = \cancel{E^2} + \cancel{E'^2} + \cancel{m^2} + 2Em - 2E'm - 2EE' - \cancel{m^2}$$

$$-2EE'\cos\phi = 2Em - 2E'm - 2EE'$$

$$E'm = Em - EE'(1 - \cos\phi)$$

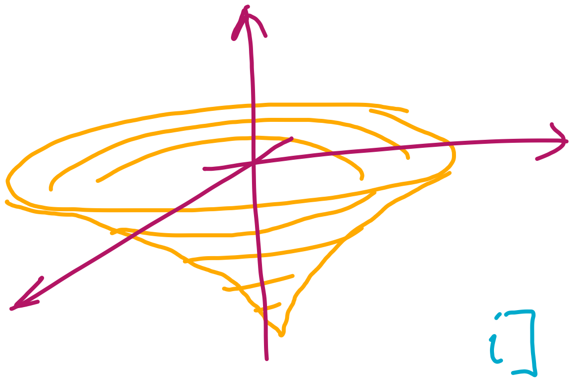
dividindo por $E'm$

$$1 = \frac{E}{E'} - \frac{E}{m}(1 - \cos\phi)$$

$$1 + \frac{E}{m}(1 - \cos\phi) = \frac{E}{E'}$$

$$\boxed{E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{m}(1 - \cos\phi)}}$$

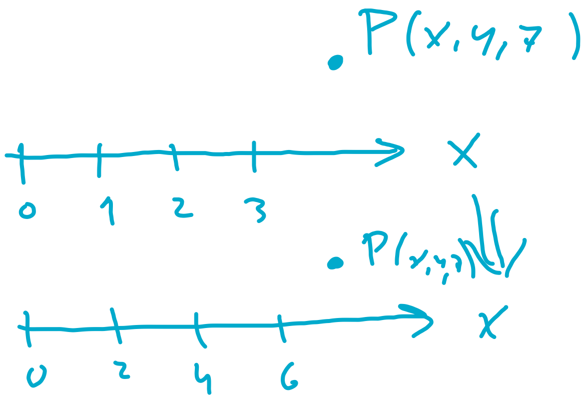
[10] A CURVATURA DO ESPAÇO-TEMPO



As distâncias podem sofrer distorções importantes.

i] A DISTÂNCIA DE UM PONTO $P(x,y,z)$ à origem é dada por:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



ii] IMAGINEM QUE $\exists$ um FENÔMENO $\forall$ que muda a coordenada x para o dobro

$$\Longrightarrow \quad d^2 = (2x)^2 + y^2 + z^2$$

mas estas alterações podem depender de outras coordenadas!

$$d^2 = (2zx)^2 + y^2 + z^2$$

iii] Mas no espaço-tempo passa-se o mesmo!!!

$$s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$s^2 = (t \;\; x \;\; y \;\; z) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz da Métrica!}} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se alterarmos esta matriz, alteramos a distância s!!

Por exemplo:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} t & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -x+t \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = t^2 + xt - x^2 - y^2 - z^2$$

Na Relatividade Geral, todos os elementos da matriz podem variar e ser diferentes de 0, ou ± 1 (e iguais).

PARADIGMA QUÂNTICO

AULA 3

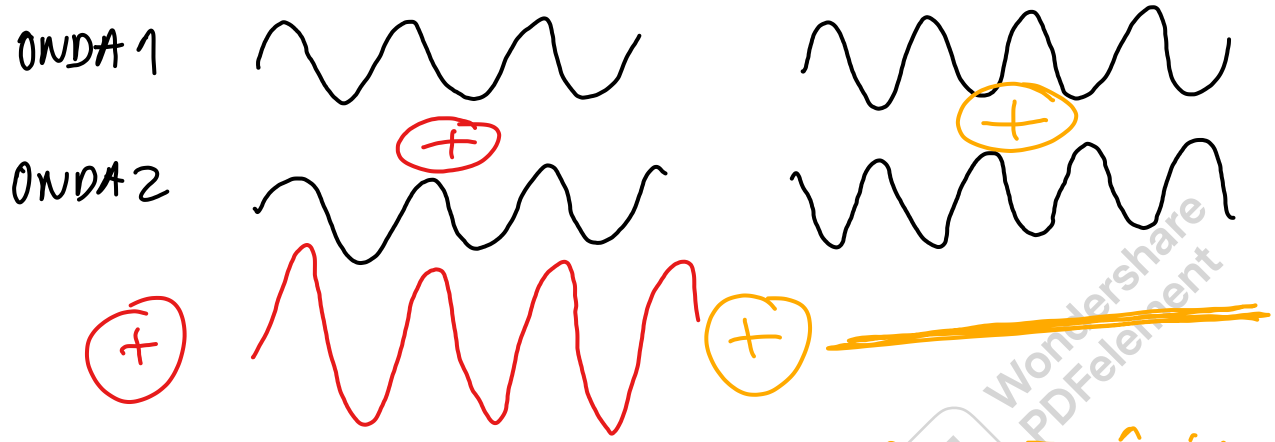
C1] A FÍSICA QUÂNTICA
DIFERE DA DE NEWTON (CLÁSSICA).
NÃO APENAS PELO FORMALISMO
MAS PELA NATUREZA DAS SUAS PARTÍCULAS

C2] MAS A FÍSICA QUÂNTICA ESTÁ EM TODO O
LADO!!!

TRANSISTOR
ECRANS LCD
LED'S

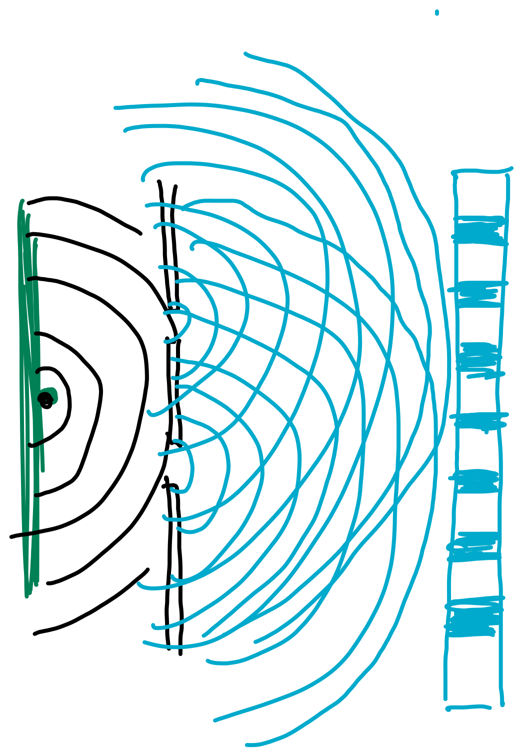
C3] DUALIDADE ONDA-PARTÍCULA

A NATUREZA DA LUZ



Interferência Construtiva

Interferência Destrutiva



⟹ As zonas claras interferência construtiva

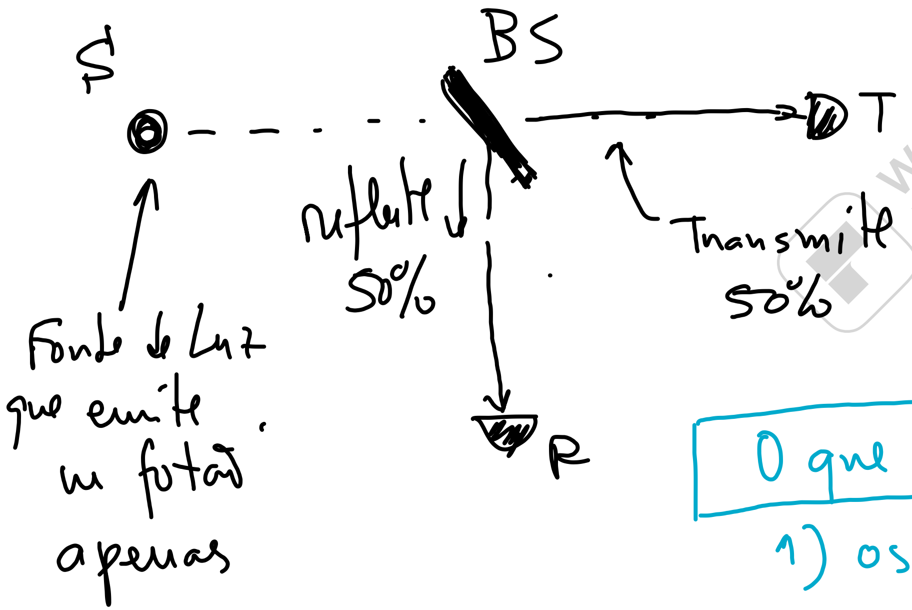
⟹ Zonas escuras interferência negativa.

C4] It just happens electrons do the same!!!

There is no way classical mechanics explain this!!

C5] PARTÍCULAS SÃO OBJETOS QUÂNTICOS E POSSUEM ESTADOS QUÂNTICOS.

2.2 ALEATORIEDADE INTRÍNSECA



BS (Beam Splitter) FAZ a divisão do feixe

50% PARA T

50% PARA R

O que se observa?

1) os Detetores nunca são ativados SIMULTANEAMENTE

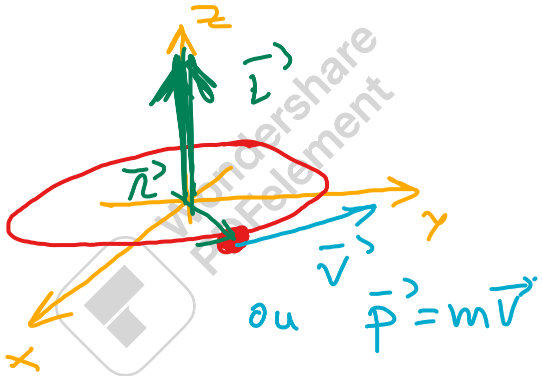
⟹ a partícula não se divide i.e. ou vai para R ou T

⟹ 2) Metade dos fotões vão para **R** e a OUTRA metade para **T**, mas não sabemos a qual detector vai para cada fotão.

⟹ ALEATORIEDADE NA MECÂNICA QUÂNTICA

SPIN:

Momento Angular: $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$
Orbital



ou seja o momento angular orbital está ligado ao movimento das partículas.

QUAL A RAZÃO DE SER DO SPIN?

$\boxed{C6}$ Imagine-se um protão: este possui Spin $= \frac{1}{2}$
(e pensava-se que era uma partícula ELEMENTAR i.e., SEM ESTRUTURA) mas não era: $= p$

MAS COMO APARECE COMO PARTÍCULA PARECE QUE TEM UM "MOMENTO ANGULAR" PRÓPRIO i.e. SPIN COMO PROPRIEDADE INTRÍNSECA

[7] ESTADO QUÂNTICO = CONCEITO MATEMÁTICO QUE DESCREVE COMPLETAMENTE UM SISTEMA QUÂNTICO

A ESTE ESTADO QUÂNTICO CORRESPONDE UM VECTOR QUÂNTICO

EX: NUM COMPUTADOR EU TENHO BITS: 0 e 1

$$\psi = a_0 \, 0 + a_1 \, 1$$

A Linguagem é confusa!!

$$|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle$$

Se tivermos um e^-: $|\tfrac{1}{2}\rangle$ $|+\rangle$ $|\uparrow\rangle$ $|1\rangle$ $|u\rangle$ $m_s = +1/2$

$|-1/2\rangle$ $|-\rangle$ $|\downarrow\rangle$ $|0\rangle$ $|d\rangle$ $m_s = -1/2$

Se tivermos 2 e^- :

$$|++\rangle \quad |+-\rangle \quad |-+\rangle \quad |--\rangle$$

$$|\uparrow\uparrow\rangle \quad |\uparrow\downarrow\rangle \quad |\downarrow\uparrow\rangle \quad |\downarrow\downarrow\rangle$$

C8] Qualquer combinação linear dos vetores $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ É UM ESTADO QUÂNTICO VÁLIDO, COMO ACONTECE COM QUALQUER VETOR:

$$|s_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$$

C9] E podemos definir, muitas bases diferentes (tal como os referenciais que tínhamos definido antes)

Se escolhermos a base $\underline{X}$ $|\rightarrow\rangle$ $|\leftarrow\rangle$

$$S_x = +\frac{1}{2}\hbar$$

$$S_x = -\frac{1}{2}\hbar$$

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle \right)$$

$$|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle \right)$$

C10] SOBREPOSIÇÃO DE ESTADOS

podemos ter um eletrão num estado de spin

$$|\psi\rangle = a_\uparrow |\uparrow\rangle + a_\downarrow |\downarrow\rangle$$

estes números têm a ver com a prob. de encontrar a partícula em cada um destes estados e é dada por: $|a_\uparrow|^2$ e $|a_\downarrow|^2$

$$|a_\uparrow|^2 + |a_\downarrow|^2 = 1$$

[11] OBSERVÁVEIS = grandezas físicas que se podem OBTER após uma <u>MEDIDA</u>

POR EXEMPLO UM AUTOMÓVEL QUÂNTICO PODE ESTAR NUM ESTADO QUE É UMA SOBREPOSIÇÃO LINEAR DE 2 VELOCIDADES:

$$|v\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|120\,km/h\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|180\,km/h\rangle$$

UM RADAR DA POLÍCIA IRIA MEDIR 120 km/h com Probabilidade 1/3 e 180 km/h com Probabilidade 2/3 ///.

AULA 4

Paradigma Quântico:

(Recap)

Exercício (Pag 26)

Um protão encontra-se no estado de spin descrito por

$$|\Psi\rangle = 0.5\,|\uparrow\rangle + 0.866\,|\downarrow\rangle$$

a) Qual a Probabilidade de encontrar o protão no estado $|\uparrow\rangle$ e no estado $|\downarrow\rangle$?

$$P_{\uparrow} = 0.5^2 = 0{,}25 \qquad P_{\downarrow} = 0.866^2 = 0{,}75$$

$$P_{\uparrow} + P_{\downarrow} = \underline{1}$$

NOTAÇÃO: $\langle BRA | KET \rangle$

vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$: $a(\vec{v}+\vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$

"ket" $\rightsquigarrow |v\rangle$ $\qquad \mathcal{H}$: $a\big(|v\rangle + |w\rangle\big) = a|v\rangle + a|w\rangle$

(espaço de Hilbert) ⟶ espaço de todos os estados

"bra" $\rightsquigarrow \langle v|$

$$\langle v| = \big[\,|v\rangle\big]^{\dagger} = \big[\,|v\rangle\big]^{*T}$$

$$\text{em } \mathbb{R}^3: \ |v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \langle v| = (v_1^* \ \ v_2^* \ \ v_3^*)$$

$$= (v_1 \ \ v_2 \ \ v_3)$$

$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow v_i \in \mathbb{R}$

[1] Produto interno

$$\langle v|v\rangle = (v_1 \ \ v_2 \ \ v_3)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \equiv \|\vec{v}\|^2$$

em $\mathbb{R}^3$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = (a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$(\cdots)$ $\quad \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

c2] NO ESPAÇO COMPLEXO $\mathbb{C}$ o módulo de um vector $z = c + id \rightsquigarrow |z|^2 = c^2 + d^2$

$z^* = c - id \rightsquigarrow z^* z = (c - id)(c + id)$

$= c^2 + d^2$

MAS PODEMOS CONSTRUIR UM VECTOR NO ESPAÇO $\mathbb{C}^3$: $\{(v_1\ v_2\ v_3) : v_i \in \mathbb{C}\}$

A norma deste vector é: $|v|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2$

$= v_1^* v_1 + v_2^* v_2 + v_3^* v_2$

$$= (v_1^* \; v_2^* \; v_3^*) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle v| \qquad\qquad |v\rangle$$

Por isso é que definimos $\langle v|$ como a Conjugada da Transposta de $|v\rangle$ i.e.

$$\langle v| = (v_1^* \; v_2^* \; v_3^*) \quad e \quad |v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle v| = \left[\,|v\rangle\,\right]^{*T}$$

C3] E o que dá $\langle v|w\rangle = ?$

$$\langle v|w\rangle = (v_1^* \; v_2^* \; v_3^*) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1^* w_1 + v_2^* w_2 + v_3^* w_3$$

BASE Ortogonal: $\{ |b_1\rangle, |b_2\rangle, \dots \}$

$$\langle b_i | b_j \rangle = \delta_{ij} \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ = 1 & i = j \end{cases}$$

Exemplo:

Base c/ 2 estados $|b_1\rangle = |1\rangle$

$|b_2\rangle = |2\rangle$

$|v\rangle = 2|1\rangle - 3|2\rangle$ $\qquad |w\rangle = |1\rangle + i|2\rangle$

$\langle v| = 2\langle 1| - 3\langle 2|$ $\qquad \langle w| = \langle 1| - i\langle 2|$

$$\langle v|w\rangle = \left[2\langle 1| - 3\langle 2|\right]\left[|1\rangle + i|2\rangle\right]$$

$$= 2\underbrace{\langle 1|1\rangle}_{=1} - 3\underbrace{\langle 2|1\rangle}_{=0} + 2i\underbrace{\langle 1|2\rangle}_{=0} - 3i\underbrace{\langle 2|2\rangle}_{=1}$$

$$= 2 - 3i$$

$\langle v|v\rangle = 13$

$\langle w|w\rangle = 2$ //

VOLTANDO NOVAMENTE AO INÍCIO:

$$|\psi\rangle = 0.5\,|\uparrow\rangle + 0.866\,|\downarrow\rangle$$

$$|\uparrow\rangle \to |1\rangle \qquad |\downarrow\rangle \to |2\rangle$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle 1|1\rangle = \langle 2|2\rangle = 1 \\ \langle 1|2\rangle = \langle 2|1\rangle = 0 \end{array} \right.$$

$$\langle\psi| = 0.5\,\langle\uparrow| + 0.866\,\langle\downarrow|$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left[0.5\,\langle\uparrow| + 0.866\,\langle\downarrow|\right]\left[0.5\,|\uparrow\rangle + 0.866\,|\downarrow\rangle\right]$$

$$= 0.5^2 \underbrace{\langle\uparrow|\uparrow\rangle}_{1} + 0.866^2 \underbrace{\langle\downarrow|\downarrow\rangle}_{1}$$

$$= 0.25 + 0.75 = 1 \;//$$

ENTRELAÇAMENTO E CORRELAÇÃO:

[1] PARA 2 ESTADOS POSSÍVEIS DE SPIN $|\uparrow\rangle$ $|\downarrow\rangle$ podemos ter o estado:

$$|\psi\rangle = a_{\uparrow}|\uparrow\rangle + a_{\downarrow}|\downarrow\rangle$$

NÃO SE PODE DIZER QUE A PARTÍCULA ESTEJA NOS 2 ESTADOS DE SPIN

O SPIN É QUE NÃO ESTÁ BEM DEFINIDO NESTE ESTADO!

2 PARTÍCULAS: $|\uparrow\uparrow\rangle$ $|\downarrow\downarrow\rangle$ $|\uparrow\downarrow\rangle$ $|\downarrow\uparrow\rangle$

QUALQUER COMBINAÇÃO DESTES ESTADOS É UM ESTADO VÁLIDO.

c2] PARA CRIAR UM ESTADO DE 2 PARTÍCULAS:

USA-SE O "PRODUTO TENSORIAL"

SE A PARTÍCULA 1 ESTIVER NO ESTADO $|s\rangle$

e A " 2 " " " $|s'\rangle$

$$\underbrace{|s\, s'\rangle = |s\rangle \otimes |s'\rangle = |s\rangle|s'\rangle}$$

a ideia é criar TODAS AS COMB. POSSÍVEIS

c3] Exemplo

$$|a\rangle = a_\uparrow |\uparrow\rangle + a_\downarrow |\downarrow\rangle$$

$$|b\rangle = b_\uparrow |\uparrow\rangle + b_\downarrow |\downarrow\rangle$$

$$|a\,b\rangle = \left[a_\uparrow|\uparrow\rangle + a_\downarrow|\downarrow\rangle\right]\left[b_\uparrow|\uparrow\rangle + b_\downarrow|\downarrow\rangle\right]$$

$$= a_\uparrow b_\uparrow|\uparrow\uparrow\rangle + a_\uparrow b_\downarrow|\uparrow\downarrow\rangle +$$

$$+ a_\downarrow b_\uparrow|\downarrow\uparrow\rangle + a_\downarrow b_\downarrow|\downarrow\downarrow\rangle$$

$\boxed{A}$ PARA CONSTRUIR O ESTADO

$$|A\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle$$

$$a_\uparrow b_\uparrow = 1 \Rightarrow a_\downarrow = 0$$

$$a_\uparrow b_\downarrow = 1 \qquad a_\uparrow \neq 0 \qquad b_\uparrow, b_\downarrow \neq 0$$

se escolhemos: $a_\uparrow = 1$, $b_\uparrow = b_\downarrow = 1$ como exemplo

$|a\rangle = |\uparrow\rangle$ e $|b\rangle = |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle$

B] VAMOS AGORA CONSTRUIR O ESTADO

$$|B\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle$$

ESTE ESTADO É PERFEITAMENTE POSSÍVEL NA NATUREZA

$$\begin{cases} a_\uparrow b_\uparrow = 1 \\ a_\downarrow b_\downarrow = 1 \\ a_\uparrow b_\downarrow = 0 \\ a_\downarrow b_\uparrow = 0 \end{cases}$$

este sistema não tem solução possível!

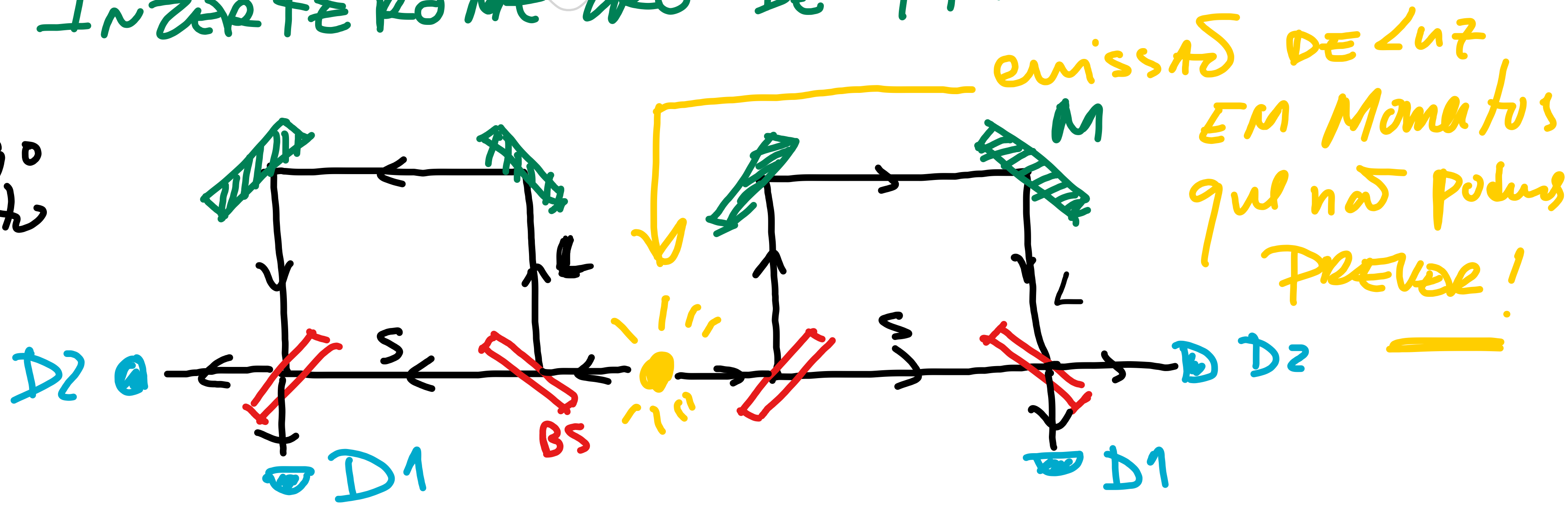
OU SEJA NÃO É POSSÍVEL CONSTRUIR O ESTADO $|B\rangle$ COM ESTADOS DE PARTÍCULA ÚNICA!!

QUANDO AS PROPRIEDADES DE 2 OU MAIS OBJECTOS QUÂNTICOS ESTÃO DEFINIDOS APENAS PARA O CONJUNTO

diz-se que os OBJECTOS ESTÃO CORRELACIONADOS OU ENTRELAÇADOS

C4 INTERFERÓMETRO DE FRANSON

{ L = Longo
{ S = curto



i] Como os braços (L, S) possuem tamanhos diferentes não vai haver interferência.

TABELA 2.3

Esquerda		Direita	
D1	50%	D1	50%
D2	50%	D2	50%

— Se medir o que acontece em cada detetor —

ii] Se medir em ambos os lados temos 4 alternativas

LL $\quad \gamma_{esq} = L \quad \gamma_{direita} = L$

LS $\quad \gamma_{esq} = L \quad \gamma_{direita} = S$

SL $\quad \gamma_{esq} = S \quad \gamma_{direita} = L$

SS $\quad \gamma_{dir}, \gamma_{esq} = S$

Q1 ⟹ QUANTOS DESTES CAMINHOS SÃO DISTINGUÍVEIS? <u>LS</u> e <u>SL</u>

estes são!!

Q2 ⟹ QUANTOS DESTES CAMINHOS SÃO IN-DISTINGUÍVEIS? LL e SS

estes fotões chegam ao mesmo tempo (e como não sabemos o to lu que foram emitidos é impossível saber qual foi o caminho).

SE o γ DA DIREITA VAI PARA:

D1		D2	
γ da Esquerda	100% D1	γ da Esquerda	0% D1
γ da Esquerda	0% D2	γ da Esquerda	100% D2

ESTA CORRELAÇÃO É UMA PROPRIEDADE DO PAR

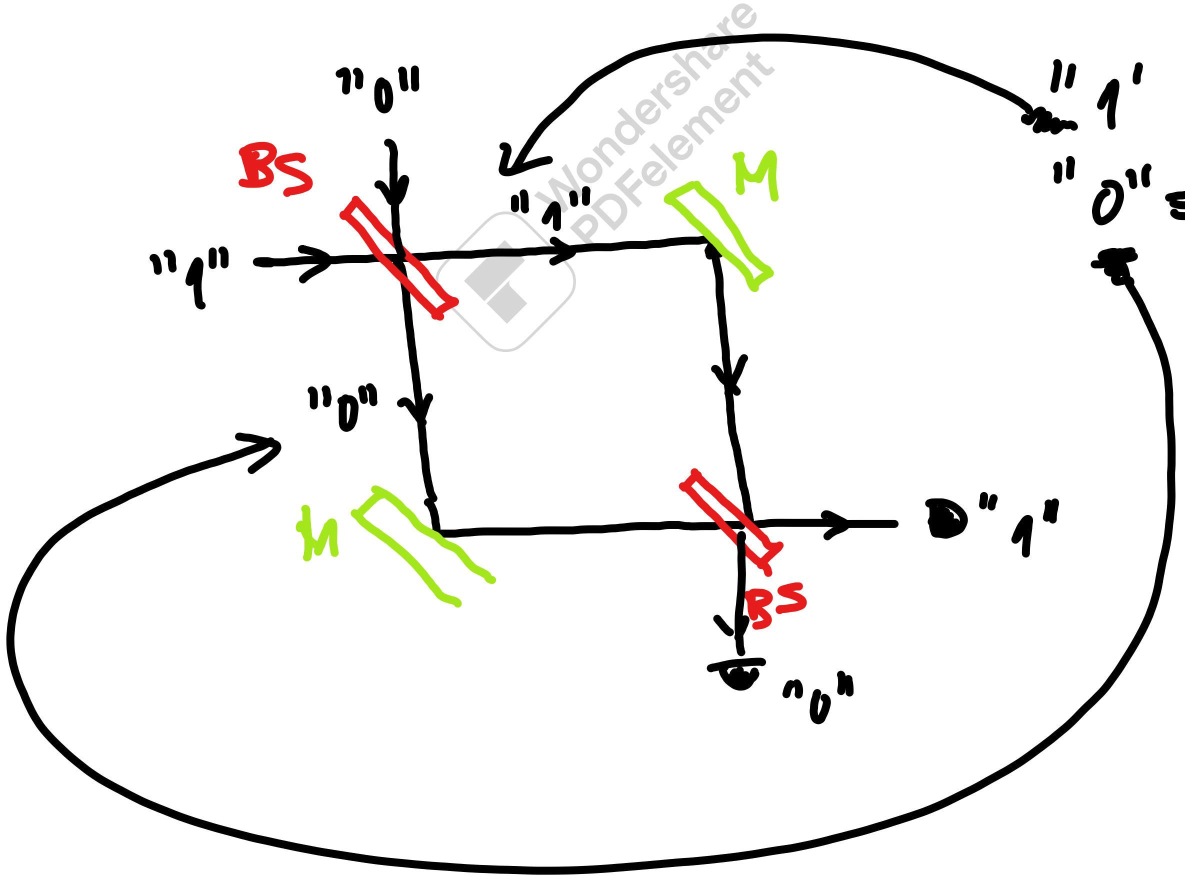
SÓ SE CONSEGUE MEDIR QUANDO SE MEDEM AS COINCIDÊNCIAS DOS FOTÕES (DO PAR)

Wondershare PDFelement

C5] CRIPTOGRAFIA QUÂNTICA

OBJECTIVO: Transmitir mensagem sem que ninguém a perceba [exc. o destinatário]

→ CODIFICAR MENSAGEM c/ CHAVE DE CÓDIGO



"1" ≡ fotão transmitido

"0" ≡ fot reflectido

OBSERVÁVEIS CONTÍNUOS

AULA 5

[1] ATÉ AGORA FALAMOS DE OBSERVÁVEIS DISCRETOS:

$$|\psi\rangle = a_\uparrow |\uparrow\rangle + a_\downarrow |\downarrow\rangle$$

MAS $\exists$ OBSERVÁVEIS CONTÍNUOS: Posição ou Momento

VAMOS IMAGINAR QUE 1 ELÉTRON SÓ PODE TER DOIS ESTADOS DE MOMENTO $|p_1\rangle$ e $|p_2\rangle$

$$\Longrightarrow \quad |\psi\rangle = a_1 |p_1\rangle + a_2 |p_2\rangle$$

EM GERAL OS ESTADOS POSSÍVEIS PARA O MOMENTO FORMAM UM CONTÍNUO:

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} a(p)\, |p\rangle\, dp \qquad \langle p'|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a(p) \langle p'|p\rangle\, dp$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a(p)\, \delta(p'-p)\, dp$$

$$|a(p')|^2 = |\langle p'|\psi\rangle|^2 \longleftarrow a(p') = \langle p'|\psi\rangle \longleftarrow$$

$= \text{Probabilidade}$

$|a(p)|^2 \equiv$ Probabilidade de encontrar a partícula com momento $\underline{p}$.

C2] EXISTE TAMBÉM A POSSIBILIDADE DE EXPANDIR A FUNÇÃO DE ONDA:

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x)\,|x\rangle\,dx$$

$|a(x)|^2 \equiv$ Probabilidade de encontrar a partícula em $\underline{x}$.

NOTA: o estado $|\psi\rangle$ é sempre o mesmo, a base é que é diferente!!

A PARTÍCULA QUÂNTICA

UMA PARTÍCULA É DEFINIDA POR UMA FUNÇÃO DE ONDA

$\psi(x,y,z,t)$ } esta ideia apareceu com Schrödinger

Propriedades da Função de Onda:

- $\psi(x,y,z,t)$ é em geral uma função que envolve COMPLEXOS!
- $\psi(x,y,z,t)$ é uma AMPLITUDE DE PROBABILIDADE
- $|\psi|^2 = \psi^* \psi$ é uma DENSIDADE DE PROBABILIDADE que depende da Amplitude anteriormente definida
- $dP = |\psi(x,y,z,t)|^2 dV$ probabilidade de encontrar a partícula num volume dV.

ONDA PLANA

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\psi = A e^{-i(kx - \omega t)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = +i\omega A e^{-i(kx-\omega t)} = i\omega \psi \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A e^{-i(kx-\omega t)} = -\omega^2 \psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -ik A e^{-i(kx-\omega t)} = -ik\psi \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 A e^{-i(kx-\omega t)} = -k^2 \psi \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi = $$
$$= -k^2 \psi$$

Non trivial:

(*) $\omega = k$

$\rightarrow$ ω = frequência angular

k = número de onda

Relações de De Broglie: $p = \dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{h}{2\pi}\dfrac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$, $\rightsquigarrow p = \hbar k$, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

[$h = 6.63 \times 10^{-34}$ J.s]

$E = hf = \dfrac{h}{2\pi} 2\pi f = \hbar \omega$ $\rightsquigarrow$ $E = \omega \hbar$

Going Back to (*) $\omega = k \longrightarrow \hbar\omega = \hbar k \Longrightarrow \boxed{E = p}$

$E=p$ é de facto a eq. $E^2=p^2+m^2$ quando $m=0$

Por. ex. um fotão!!

C3 Mas porquê representar a onda plana por

$$\psi = A e^{-i(kx-\omega t)}$$

Solução 1 de $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$

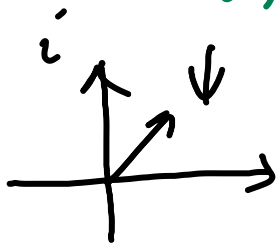
$$\psi = A\cos(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k^2\psi \rightsquigarrow \omega = k$$

Solução 2 $\psi = A\sin(\omega t - kx)$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k^2\psi \rightsquigarrow \omega = k$$

Both solutions are ok!



$$\psi = A\cos(\omega t - kx) + iA\sin(\omega t - kx)$$

$$\psi = A e^{-i(kx-\omega t)}$$

é uma solução final.

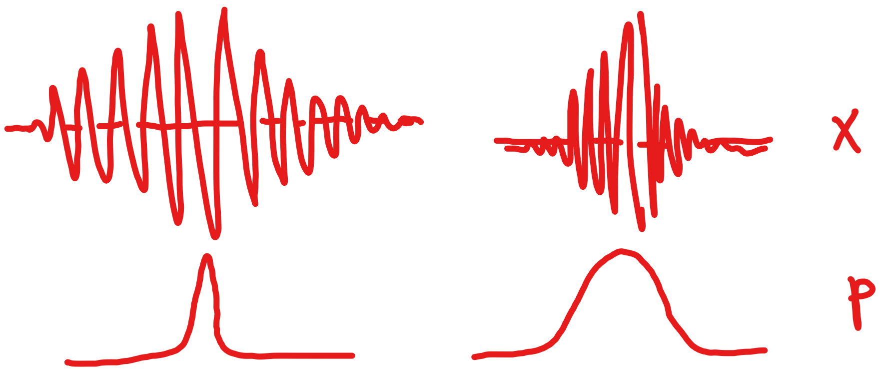
Onda plana $\psi(x,t) = A e^{-i(kx-\omega t)}$

$|\psi(x,t)|^2 = A^2 \equiv c^{te}$ em todo o espaço tempo!

!!!

Implicação: uma partícula descrita por uma onda plana, possui E e p bem definidos mas pode ser encontrada em qualquer ponto do espaço-tempo.

PARA LOCALIZAR UMA PARTÍCULA NO ESPAÇO-TEMPO:



GRANDE CERTEZA EM X

$\Longrightarrow$ GRANDE INCERTEZA EM P!!.

$\Delta X \equiv$ rms

$\Delta x \, \Delta k \geq 1/2$

$p = \hbar k \implies \Delta x \, \Delta p \geq \hbar/2$

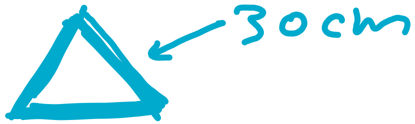
princípio de incerteza!!

C4 "NÃO TEM + SENTIDO NA NATUREZA DETERMINAR X e P COM PRECISÃO INFINITA"

O que significa isto?

$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{1{,}054 \times 10^{-34}}{2} \text{ J.s} \approx 10^{-34} \text{ J.s}$

A (GAMOW): MESA DE BILHAR:



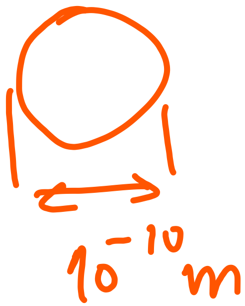
$\Delta x = 0.3 \text{ m}$

$\Delta p \cong \frac{10^{-34}}{0.3} \cong 3 \times 10^{-34} \text{ kg}\frac{m}{s}$

se a massa de uma bola de bilhar fosse 1 kg

! COMPLETAMENTE IRRELEVANTE Δv E PODEMOS DIZER que $v = 0$ $\Big\}$ $\Delta p = m \Delta v$ a incerteza na velocidade seria: 10^{-34}!!!

B E NO CASO DE UM ELECTRÃO NUM ÁTOMO DE HIDROGÉNIO



$\Delta x \, \Delta p \sim 10^{-34}$

!

$$\Delta p = \frac{10^{-34}}{10^{-10}} = 10^{-24}$$

$m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} = \frac{10^{-24}}{10^{-30}} = 10^{6} \text{ m/s}$$

ESTA É A INCERTEZA COM QUE SE PODE DETERMINAR A VELOCIDADE DO ELECTRÃO ?!

OU SEJA $\Longrightarrow$ A ORIGEM DO MOVIMENTO DOS ELECTRÕES NOS ÁTOMOS É QUÂNTICA !!!

$$\Delta E \, \Delta t \geq \hbar/2$$

$\Uparrow$ incerteza na definição da Energia

Δt $\longrightarrow$ caracteriza o tempo em que é possível encontrar a partícula na posição X.

$\Longrightarrow$ Se $\Delta E = 0$ $\Longrightarrow$ $\Delta t = \infty$

Ou seja, se uma partícula tem uma energia bem definida, PERMANECE PARA SEMPRE NESSE ESTADO!

Eq. Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)+V(x)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,t)$$

$$\Psi(x,t)=\psi(x)\,\phi(t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi(t)\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+V(x)\psi(x)\phi(t)=i\hbar\,\psi(x)\frac{\partial\phi(t)}{\partial t}$$

dividindo por $\phi(t)\,\psi(x)$:

$$\frac{1}{\psi}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+V(x)\right]=i\hbar\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial t}\equiv E$$

Energia Cinética $\overbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}$ $+\overbrace{V(x)\psi}^{\text{Energia Potencial}} = E\psi$

E é de facto uma energia !!

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = E\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}E\phi$$

$$\boxed{E = \hbar\omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = -i\omega\phi$$

$$\phi = e^{-i\omega t}$$

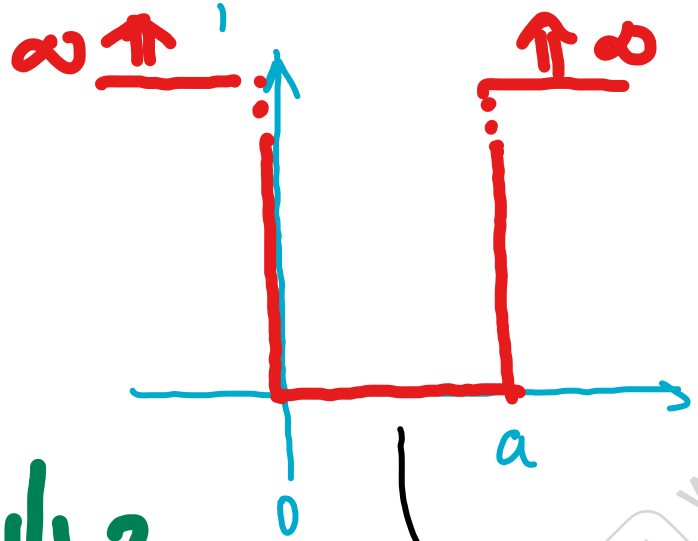
$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} = -i\omega\phi\right] !!$$

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\, e^{-i\omega t}$$

$$|\Psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2$$

Exemplos:

1 Poço de Potencial



$V(x) = \infty \qquad x > a$

$\qquad\qquad\quad\;\; x < 0$

$V(x) = 0 \qquad x \leq x \leq a$

$\boxed{A}\ \psi = ?$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E\psi$$

Proposta: $\psi = A\sin(kx) + B\cos(kx)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = kA\cos(kx) - kB\sin(kx)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 A\sin(kx) - k^2 B\cos(kx) = -k^2\psi$$

$$(*) \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-k^2\psi\right) = E\psi \qquad \frac{k^2\hbar^2}{2m} = E = \frac{p^2}{2m} \quad ///$$

$\boxed{B}$ **E=?**

$$\psi(x=0) = \psi(x=a) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x=0) = 0 \implies B = 0 \\ \psi(x=a) = 0 \implies \sin(ka) = 0 \end{array} \right.$$

$$ka = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$\exists$ n valors

$$k \sim k_n = n\pi/a$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = n^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

AULA 6

Schrödinger Equation

Energía de una partícula:

$E_c + V = E$ $\qquad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m$

A ideia: $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

1 $E_c\psi + V\psi = E\psi$

$\frac{p^2}{2m}\psi + V\psi = E\psi$

Schrödinger: Se as partículas são "ondas" então tem de existir uma equação de onda.

Eq. de onda:

2 $\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$

$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -kA\sin(kx-\omega t)$ $\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k^2\psi$

$p = \hbar k$
$E = \hbar\omega$

multiplicando por $-\frac{\hbar^2}{2m}$: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi = \underbrace{\frac{p^2}{2m}\psi}_{E_c\psi}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + V\psi = E\psi$$

mas a solução $\psi(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$ é também solução.

PODEMOS JUNTAR AMBAS AS SOLUÇÕES NUMA SÓ

USANDO: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad i=\sqrt{-1}, \; i^2=-1$

$$\psi(x,t) = A\{\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)\} = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = A\{-k\sin(kx-\omega t) + ik\cos(kx-\omega t)\}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = A\{-k^2\cos(kx-\omega t) - k^2 i\sin(kx-\omega t)\} = -k^2\psi$$

$\longrightarrow$ multiplicando por $-\frac{\hbar^2}{2m}$: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = +\frac{\hbar^2k^2}{2m}\psi = \frac{p^2}{2m}\psi$ //

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = A\{+\omega\sin(kx-\omega t) - i\omega\cos(kx-\omega t)\}$$

$\longrightarrow \times(i\hbar)$: $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hbar\omega\psi \Longrightarrow i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ //

Eq. Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

BUT: $\psi(x,t) = \psi(x)\,\phi(t)$

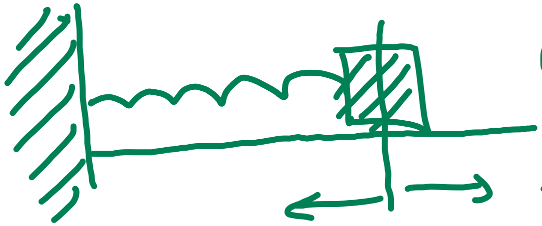
$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x)\right\}\phi(t) = \left\{i\hbar\frac{\partial\phi(t)}{\partial t}\right\}\psi(x)$$

$$\frac{1}{\psi(x)}\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi\right\} = E = \frac{1}{\phi}\left\{i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\}$$

Oscilador Harmónico: $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$

constante da força

OSCILADOR HARMÓNICO CLÁSSICO



$\vec{F} = -k\vec{x}$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

→ frequência de oscilação.

O ÁTOMO DE HIDROGÉNIO: $V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r}$

$$E_n = -\frac{13{,}6\ \text{eV}}{n^2}$$

Poço Potencial	Oscilador	Coulomb
$E \propto n^2$	$E \propto n$	$E \propto n^{-2}$

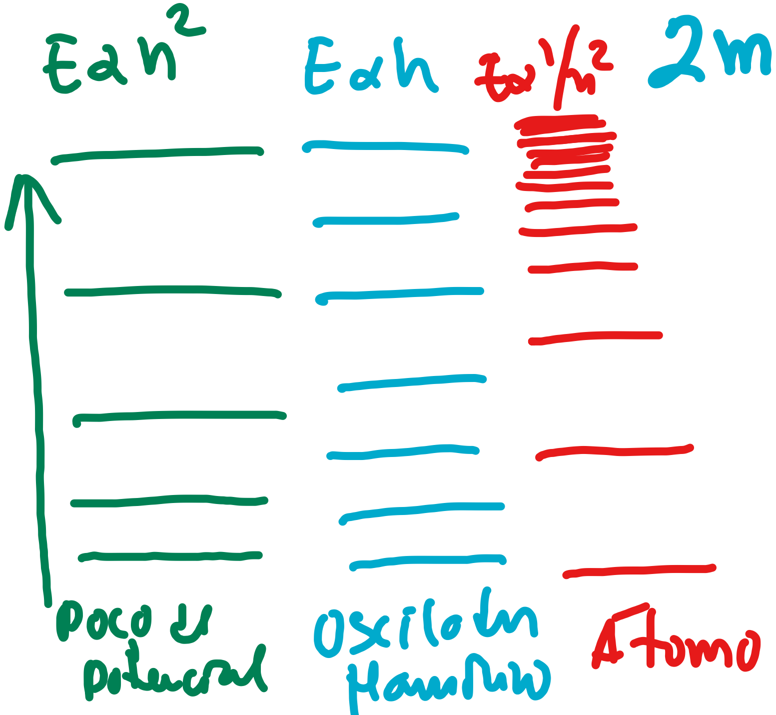
Exercício (Pag 58)

Determinar Energias de Transição

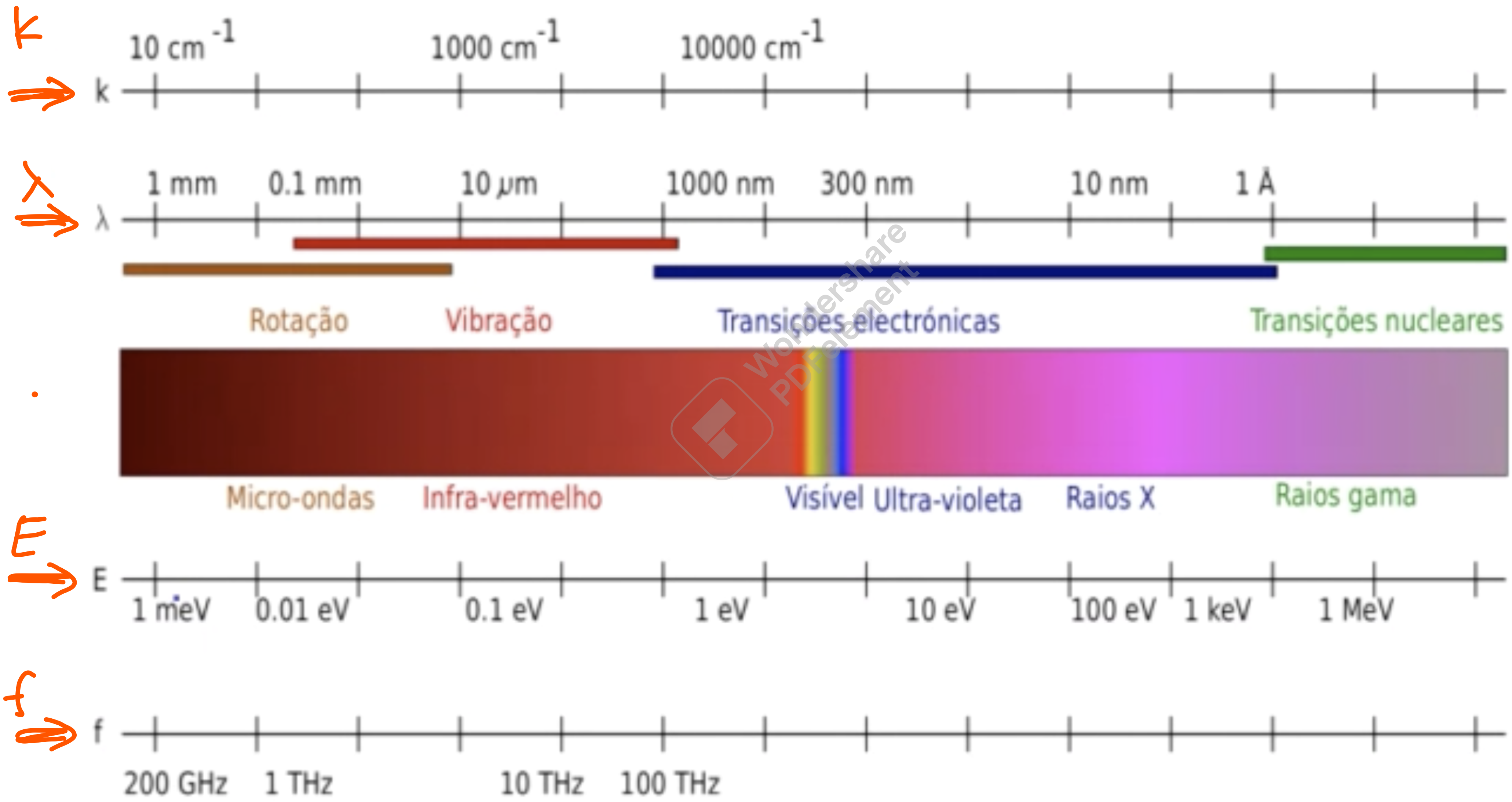
$$E_{4\to3} = E_4 - E_3 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(4^2-3^2)$$

$$\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = 6.03\times10^{-20}\,J = 0.377\,eV$$

$$\boxed{E_{4\to3} = 4{,}52\,eV}$$



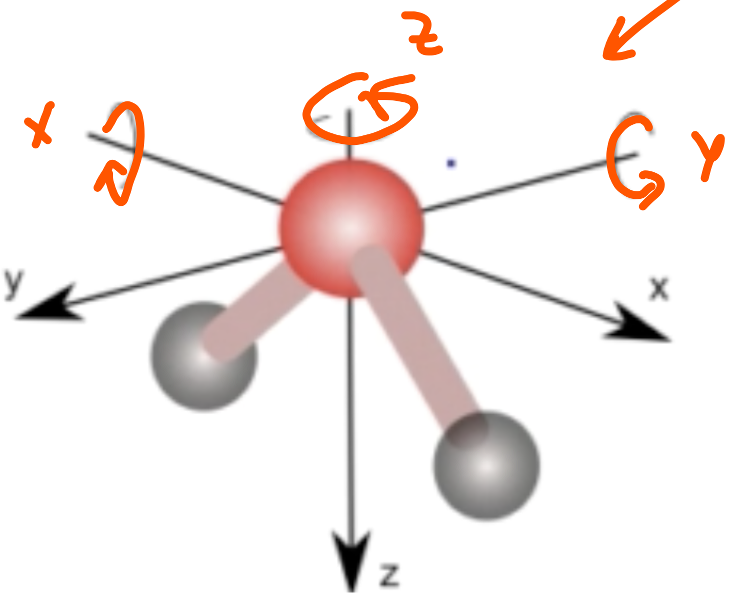
TRANSIÇÕES ENTRE ESTADOS (CAP 4)



Rotações

H_2O

Podemos colocar a mol. H_2O a rodar c/ micro-ondas



[1] Rotação acontece em moléculas

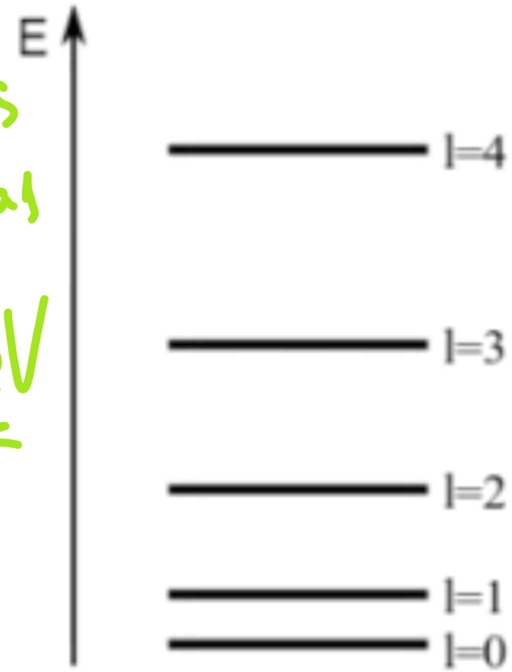
[2] Rotações em 3 eixos (x, y, z)

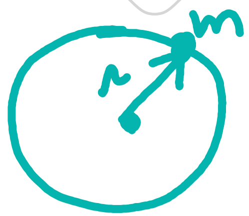
[3] A energia das transições rotacionais depende do $\underline{\underline{L}}$

$$L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar$$

Energias pequenas

Em meV





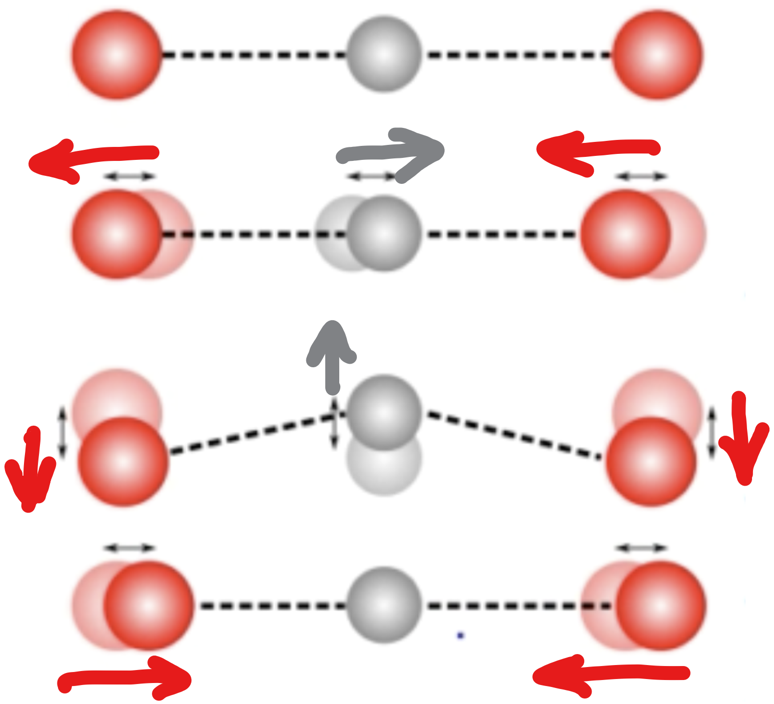
$I = mr^2$

$$E_{translações} = \frac{p^2}{2m}$$

$$E_{rotações} = \frac{L^2}{2I} = \frac{l(l+1)}{2I}\hbar^2$$

Momento de Inércia

VIBRAÇÕES:



c1] ESTADOS DE VIBRAÇÃO ESTÃO QUANTIZADOS

c2] FORÇA HARMÓNICA

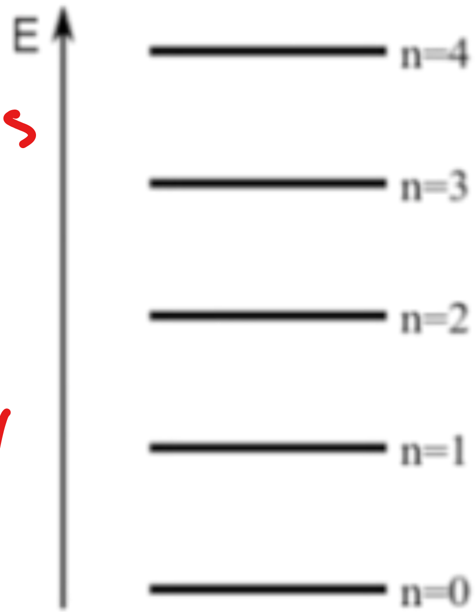
$\Rightarrow V = \frac{1}{2} k x^2$

c3] O SISTEMA VIBRA COM UMA FREQUÊNCIA ANGULAR ω_c

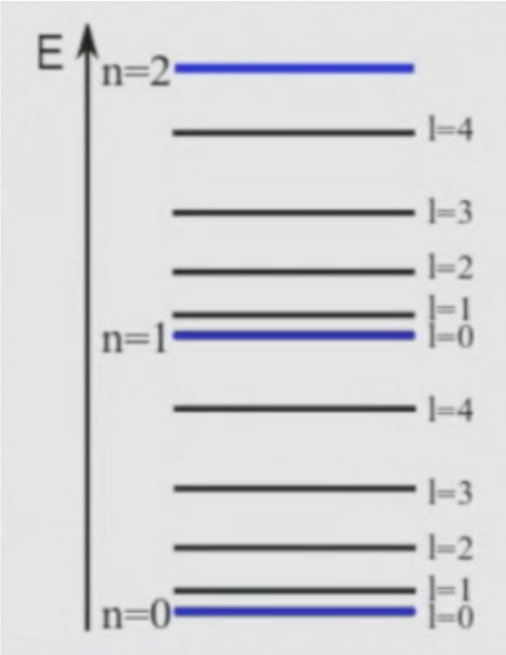
$$\omega_c = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

c4] $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega_c \hbar$

Energias da ordem de 0.1 eV

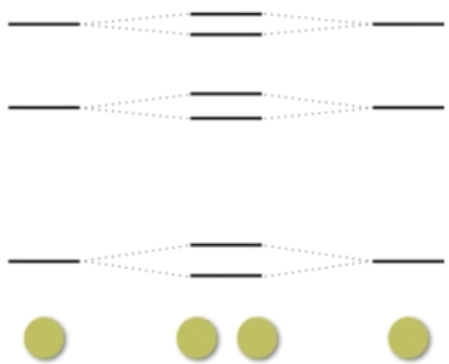


VIBRAÇÕES E ROTAÇÕES

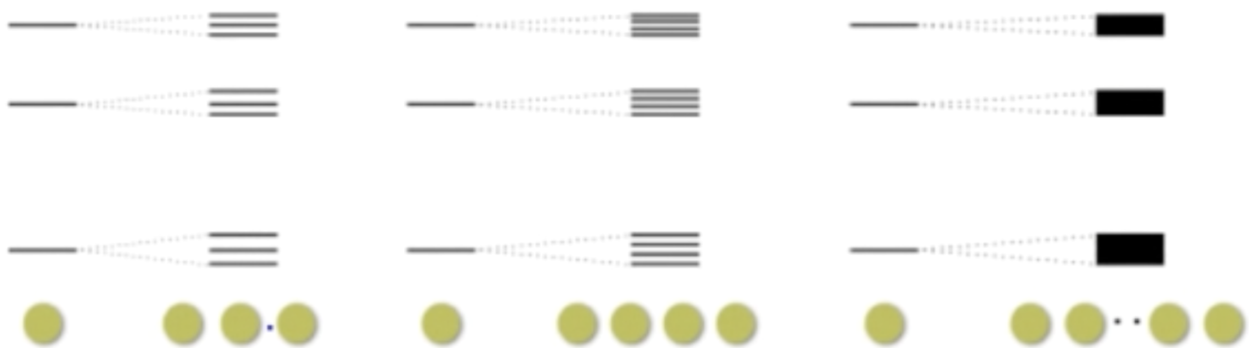


C1] UMA MOLÉCULA PODE TER VIBRAÇÕES E ROTAÇÕES AO MESMO TEMPO

QUANDO APROXIMAMOS 2 ÁTOMOS:



QUANDO APROXIMAMOS N.



CONDUTOR

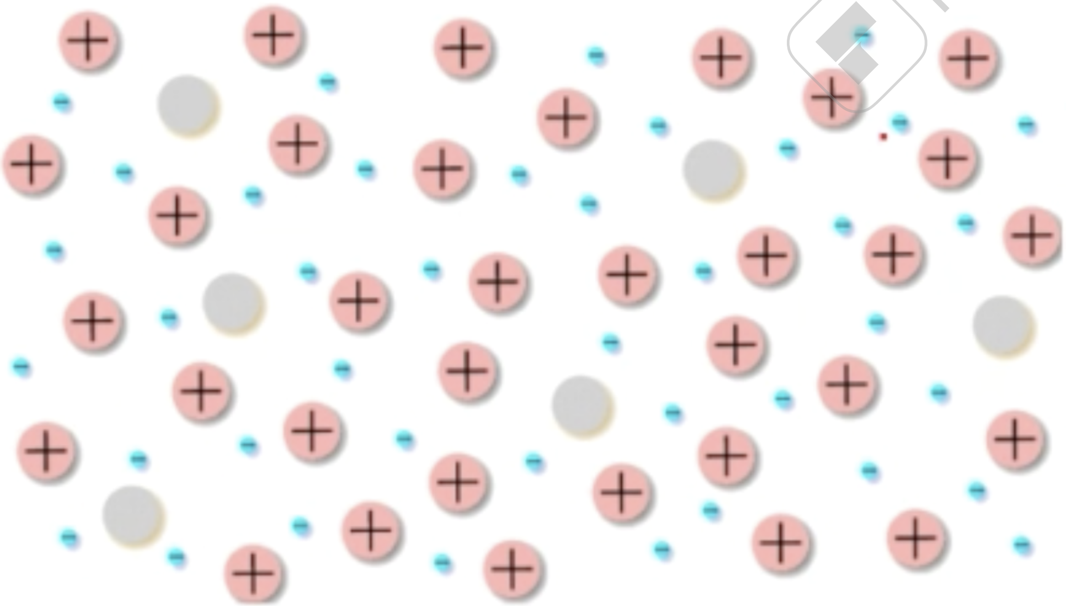
A) SÓLIDOS:

C1] ISOLANTES: BANDA VALÊNCIA PREENCHIDA

METAL: BANDA VALÊNCIA SEMI-PREENCHIDA

SEMI-CONDUTOR: PEQUENO "GAP"

B) PLASMAS (GÁS)



C1] PLASMAS SÃO NEUTROS MAS POSSUEM ÍONS (N_i)

$$\eta = \frac{N_i}{N_i + N_a} \qquad N_a \equiv \text{nº átomos neutros}$$

C2] Eq. Saha

$$\frac{n_i}{n_a} \simeq 2{,}4 \times 10^{21} \left(\frac{T^{3/2}}{n_i} \right) e^{-E_i / k_B T}$$

PLASMAS EM CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

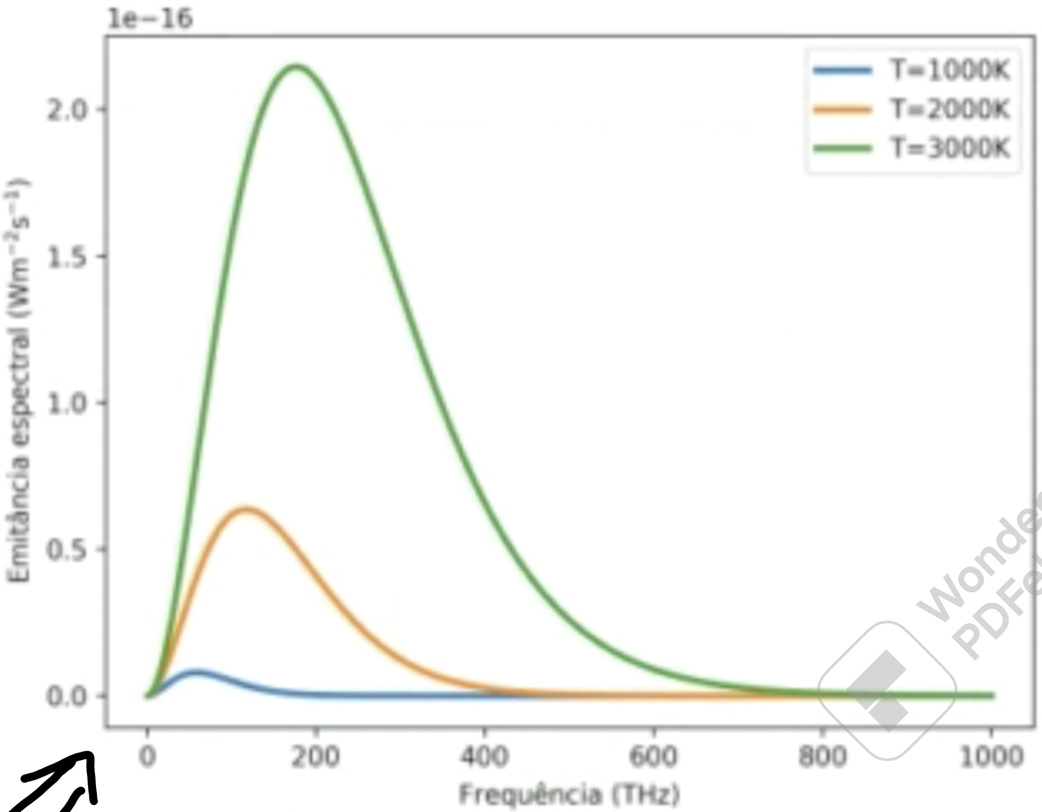
[3] PLASMAS POSSUEM CARGA

$\Rightarrow \exists$ interação com campos $(\vec{E}, \vec{B})$

A partir de uma dada frequência, os e^- não conseguem interagir

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}$$

"FREQUÊNCIA DE PLASMA"



CORPO NEGRO:

energia emitida$/m^2 s$

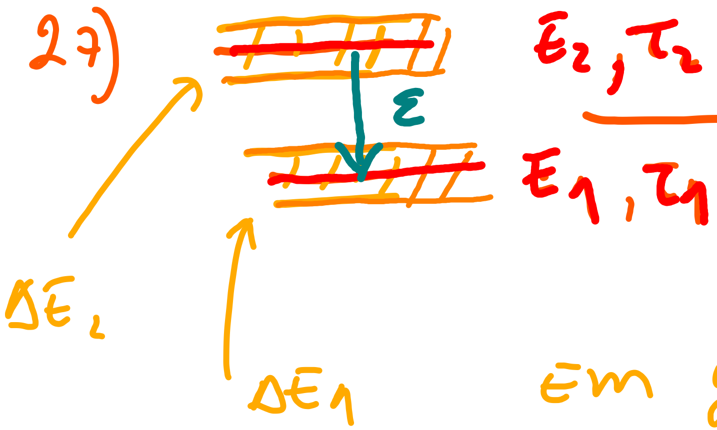
[1] LEI DE STEFAN-BOLTZMANN: $U(T) = \sigma T^4$

[2] LEI DE WIEN: $\lambda_m T = \sigma_w$

$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W/(m^2 K^4)$

$\sigma_w = 2{,}898 \times 10^{-3}\ K.m$

27)



$\longrightarrow \Delta E = ?$

$$\Delta E_2 = \frac{\hbar}{2\pi \tau_2} = \frac{6.58 \times 10^{-16}}{1.2 \times 10^{-8}} = 5{,}4 \times 10^{-8}$$

$$\Delta E_1 = \frac{\hbar}{2\pi \tau_1} = \frac{6.58 \times 10^{-16}}{2{,}3 \times 10^{-8}} = 2{,}86 \times 10^{-8}$$

Em qual: $\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2$

$$= (5{,}4 + 2{,}86) \times 10^{-8} \cong 8{,}26 \times 10^{-8}$$

AULA 7

Núcleo Atômico

c1] CONSTITUÍDO POR "p" e "n"

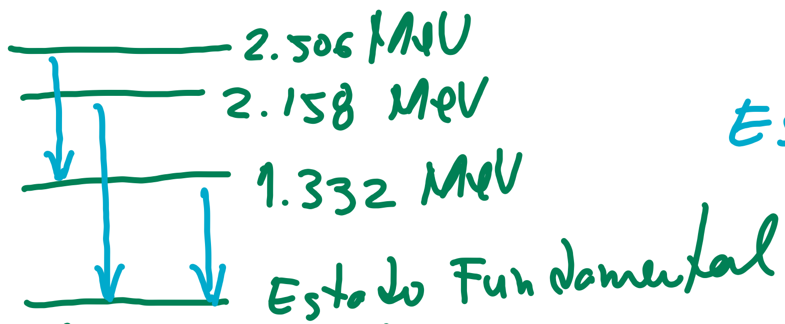
Z = número atômico = $\sum p$

A = número de massa = $\sum (p+n)$

c2] ELEMENTOS COM O MESMO Z E A DIFERENTE CHAMAM-SE ISÓTOPOS

Ex: $^{12}_{6}C$ e $^{14}_{6}C$

c3] TAL COMO OS ÁTOMOS, OS NÚCLEOS POSSUEM NÍVEIS DE ENERGIA



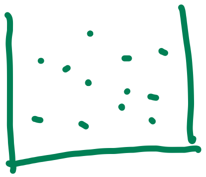
$^{60}_{28}Ni$ Níquel

ESCALA DE ENERGIA:

MeV

(muito diferente dos níveis eletrônicos eV)

C4] TEMPO MÉDIO DE VIDA



N núcleos radioativos

QUANTOS VÃO EM MÉDIA DECAIR NO PRÓXIMO INTERVALO dt $\left(\lim_{\Delta t \to 0} \Delta t = dt \right)$

$$dN(t) = -w_d N(t)\, dt$$

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -w_d\, dt$$

A solução é: $N(t) = N_0 e^{-w_d t}$

Verificação: $\frac{dN}{dt} = -w_d \underbrace{N_0 e^{-w_d t}}_{N} = -w_d N(t)$

$$\boxed{dN = -w_d N(t)\, dt.}$$

QUANDO A POPULAÇÃO diminui: $N(t) = \frac{N_0}{e}$

⟷ TEMPO DE VIDA MÉDIA (τ)

$$\frac{N(t=\tau)}{N_0} = \frac{1}{e} = e^{-1} = e^{-w_d \tau} \Rightarrow w_d = \frac{1}{\tau} \longrightarrow \boxed{N(t) = N_0 e^{-t/\tau}}$$

TAMBÉM ∃ O TEMPO DE MEIA-VIDA: $T_{1/2}$ i.e. $N(t) = \frac{N_0}{2}$

$$\boxed{T_{1/2} = \tau \ln 2}$$

Se tivermos vários canais de decaimento W_{d_i}

$$dN(t) = -W_{d_1}N(t)dt - W_{d_2}N(t)dt \dots - W_{d_N}N(t)dt$$

$$= \underbrace{-\sum W_{d_i}}_{-W_T}\,dt$$

basta substituir na eq. $N(t) = N_0\, e^{-(\sum_i W_{d_i})t}$ e $\tau = \dfrac{1}{\sum_i W_{d_i}}$

C5] Tipos de Decaimentos

i) dec. GAMA: ${}^{A}_{Z}X^* \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$

ii) dec. ALFA: ${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X + \alpha \longrightarrow$ núcleo de Hélio

iii) dec. BETA: $n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ β^-

$p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e$ β^+

ex: ${}^{14}_{6}C \to {}^{14}_{7}N + e^- + \bar{\nu}_e$

captura!

iv) CAPTURA ELECTRÔNICA: $p + e^- \longrightarrow n + \nu_e$

[Ex: ${}^{67}_{31}Ga + e^- \longrightarrow {}^{67}_{30}Zn + \nu_e$ e ${}^{67}_{30}Zn$ decai em 78,2 horas]

C6] Reacções em Cadeia: Fissão Nuclear

$$n + {}^{235}_{92}U \xrightarrow{\text{Fissão Nuclear}} {}^{137}_{52}Te + {}^{97}_{40}Zr + n + n$$

1 n dá origem a 2 n

$$K = \frac{\text{neutrões numa dada geração}}{\text{neutrões na geração anterior}}$$

$K=1$, a reacção é crítica [centrais nucleares]

$K>1$, " " supercrítica $\Rightarrow$ nº de neutrões cresce exponencialmente. [Bombas Nucleares]

$K<1$ " " sub-crítica $\Rightarrow$ nº de neutrões decresce exponencialmente.

[7] Fusão Nuclear

(Dois núcleos fundem-se)

Mais simples: $p + n \longrightarrow d + \gamma$

deuterão

deuterão

$p + {}^2_1H \longrightarrow {}^3_2He + \gamma$

$n + d \longrightarrow {}^3_1H + \gamma$

Trítio (isótopo do H)

O Protão:

(uud)

Estado Fundamental	938 MeV
1º Excitado	1440 MeV
2º Excitado	1520 MeV
⋮	⋮

Esta transição liberta ~ 500 MeV

Podem $\exists$ outros decaimentos:

$p(1440) \rightarrow p + \pi^0$

ANTI PARTÍCULAS: O que são?

NÚMERO LEPTÓNICO
NÚMERO BARIÓNICO } O que são?

MESÕES E BARIÕES

O Modelo Padrão

Aula 8

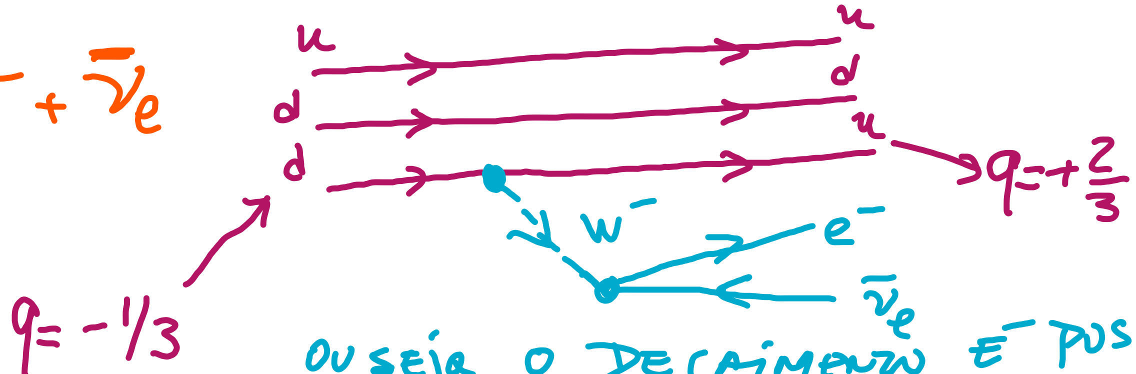
1] Descreve as partículas e as interações entre elas

2] Uma das partículas que vimos: Neutrinos têm propriedades muito particulares

3] Produzidos em interações fracas i.e., no decaimento radioativo.

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$

(udd) (uud)



Ou seja o decaimento é possível devido ao W^-

Quais são as opções?

$$|\nu_e\rangle = U^*_{e1}|\nu_1\rangle + U^*_{e2}|\nu_2\rangle + U^*_{e3}|\nu_3\rangle$$

$$|\nu_\mu\rangle = U^*_{\mu 1}|\nu_1\rangle + U^*_{\mu 2}|\nu_2\rangle + U^*_{\mu 3}|\nu_3\rangle$$

$$|\nu_\tau\rangle = U^*_{\tau 1}|\nu_1\rangle + U^*_{\tau 2}|\nu_2\rangle + U^*_{\tau 3}|\nu_3\rangle$$

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^*_{e1} & U^*_{e2} & U^*_{e3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix}}$$

como os neutrinos possuem energia → para logo os conhecidos estados com massa bem definida

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{3} U^*_{\alpha i}|\nu_i\rangle$$

m_1, m_2, m_3 = estados de massa

$U^*_{\alpha i}$: complexo conjugado de $U_{\alpha i}$

2 $\longrightarrow$ $|\nu_i\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i} |\nu_\alpha\rangle$ $\longrightarrow$ $|\nu_k\rangle = \sum_\beta U_{\beta k} |\nu_\beta\rangle$

também pode ser representado assim!

Teoría [Fenomenologia]:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U^*_{\alpha k} |\nu_k\rangle$$ ↳ $k = 1, 2, 3$ $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, |\nu_3\rangle$

$\alpha = e, \mu, \tau$ $|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle, |\nu_\tau\rangle$

Quando um $|\nu\rangle$ é produzido tem uma energia bem definida i.e., massa!

$$|\nu_k(x,t)\rangle = e^{[-iE_k t + ip_k x]/\hbar} |\nu_k\rangle$$

depende em x e t!

$$|\nu_\alpha(x,t)\rangle = \sum_k U^*_{\alpha k} |\nu_k(x,t)\rangle = \sum_k U^*_{\alpha k} e^{[-iE_k t + ip_k x]/\hbar} |\nu_k\rangle$$

$$= \sum_k U^*_{\alpha k} e^{[-iE_k t + ip_k x]/\hbar} \sum_\beta U_{\beta k} |\nu_\beta\rangle$$

$$e^{-i\theta_k} = e^{[-iE_k t + ip_k x]/\hbar}$$

$$= \sum_\beta \left(\sum_k U^*_{\alpha k} e^{[-iE_k t + ip_k x]/\hbar} U_{\beta k} \right) |\nu_\beta\rangle$$

$$= a_e |\nu_e\rangle + a_\mu |\nu_\mu\rangle + a_\tau |\nu_\tau\rangle$$

$$|\nu_\alpha(x,t)\rangle = \sum_\beta \underbrace{\left(\sum_k U^*_{\alpha k}\, e^{-i\theta_k}\, U_{\beta k}\right)}_{A_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}} |\nu_\beta\rangle$$

ou seja a probabilidade é $|A_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}|^2$

$$P_{\alpha\to\beta} = \left|\sum_k U^*_{\alpha k}\, e^{-i\theta_k}\, U_{\beta k}\right|^2$$

$\underline{\underline{\text{NOTA}}}$: $\theta_k = \dfrac{E_k t - P_k X}{\hbar}$ Para neutrinos ultrarelativísticos $c \cong 1$, $x = t = \underline{\underline{L}}$

$$\theta_k = \frac{(E_k - P_k)L}{\hbar} = \frac{E_k^2 - P_k^2}{E_k + P_k} \cdot \frac{L}{\hbar} = \frac{m_k^2}{2\hbar E_k} L$$

INTERAÇÕES

1) Electromagnética: mediador γ (interage entre cargas)

2) Fraca: W e Z mediadores

O W muda o sabor das partículas:

1) Leptons: sempre na mesma família

2) Quarks: pode mexer com partículas

3) Forte: mediador glúon

Existe uma espécie de carga ≡ cor

cor ≡ azul, vermelho e verde

3 quarks: cor branca

2 quarks: cor + anti-cor

Aula 9

Observações Cosmológicas

1] PODEMOS CONSIDERAR 3 ASPECTOS FUNDAMENTAIS NA COSMOLOGIA:

1] Cosmologia Experimental

CONJUNTO DE OBSERVAÇÕES EXPERIMENTAIS SOBRE O COSMOS QUE PODEMOS FAZER.

2] Cosmologia Dedutiva

CONSISTE NAS EXTRAPOLAÇÕES QUE FAZEMOS, COM BASE NAS LEIS QUE CONHECEMOS

3] ESPECULAÇÃO:

CONJUNTO DE IDEIAS, COM MAIS OU MENOS FUNDAMENTO PARA AS QUAIS NÃO TEMOS QUALQUER OBSERVAÇÃO

OBSERVAÇÕES ASTRONÔMICAS

[1] QUANDO FAZEMOS OBSERVAÇÕES USAMOS TELESCÓPIOS DE: RADIAÇÃO VISÍVEL, Infra-Vermelho, UV, ondas RÁDIO, RAIOS-X, etc.

[2] A RADIAÇÃO VIAJA À VELOCIDADE DA LUZ: QUANTO MAIS LONGE ESTIVEREM OS OBJETOS MAIS TEMPO DEMORAM A CHEGAR ATÉ NÓS!

[3] A luz do Sol demora 8 minutos a chegar à Terra ⟹ ou seja quando olhamos o Sol vemos o Sol À 8 minutos atrás!

$$\boxed{\text{OLHAR MAIS LONGE} \Longrightarrow \text{VER COISAS MAIS ANTIGAS !!}}$$

Princípio Cosmológico

A NOÇÃO DE QUE A TERRA NÃO É UM LOCAL ESPECIAL LEVA AO PRINCÍPIO COSMOLÓGICO:

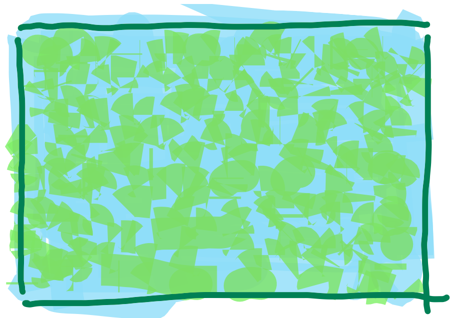
"QUALQUER OBSERVADOR, EM QUALQUER PONTO DO UNIVERSO DEVE VER O MESMO UNIVERSO, COM AS MESMAS LEIS FÍSICAS"

MAS É PRECISO USAR ESCALAS SUFICIENTEMENTE GRANDES i.e., ESCALAS COSMOLÓGICAS.

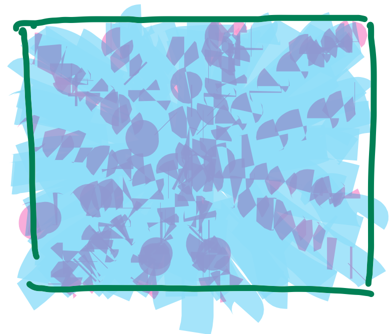
Homogeneidade e Isotropia:

$\Longrightarrow$ ALGO É HOMOGÊNEO QUANDO AS SUAS PROPRIEDADES SÃO IGUAIS EM TODO O LADO [ex. ar numa sala fechada]

⇒ Algo é isotrópico se as propriedades forem iguais em todas as direções



Homogêneo



Isotrópico

Paradoxo de Olbers (Heinrich Wilhelm Olbers) 1826

Porque é o céu escuro à noite?

⇒ Porque o Universo não é infinito

Se fosse todas as estrelas iriam contribuir para iluminar o céu todo.

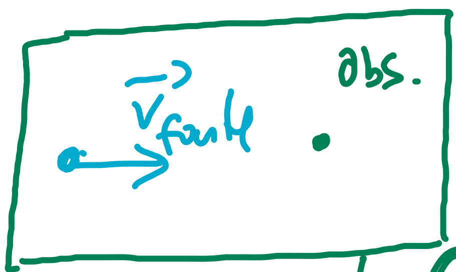
$\Rightarrow$ ou seja o Universo não existiu sempre.

Desvio para o Vermelho

Efeito Doppler

Quando uma ambulância se aproxima o som é mais agudo (f mais alto) e quando se afasta é mais grave (f mais baixa)

Som: 1) Fonte (ambulância) move-se com velocidade v_{fonte} em direção ao observador



$$f_{obs} = \frac{f_0}{1 - \frac{v_{fonte}}{c}} \quad \begin{cases} v_{fonte} > 0 & \text{fonte aproxima-se do observador} \\ v_{fonte} < 0 & \text{fonte afasta-se do observador} \end{cases}$$

velocidade da onda no meio → c

2) OBSERVADOR MOVE-SE EM DIREÇÃO À FONTE COM VELOCIDADE V_{obs}

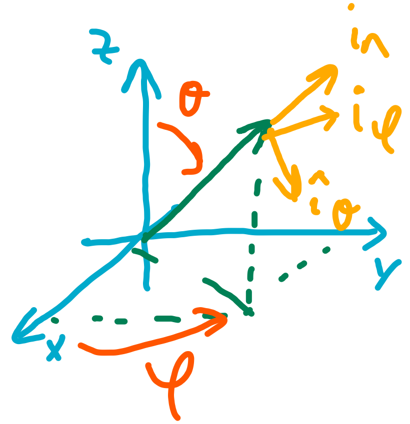
$$f_{OBS} = f_0 \left(1 - \frac{V_{obs}}{c}\right)$$

[VER SLIDES DAQUI PARA A FRENTE]

Factor de Escala e Curvatura do Universo

Aula 10

$$ds^2 = dt^2 - (\underbrace{dx^2 + dy^2 + dz^2}_{dl^2})$$



Coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$ds^2 = dt^2 - dl^2$$

$$= dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

Métrica de Robertson-Walker:

e se o Universo estiver a expandir?.... $a(t)$ faz aumentar $(dx^2+dy^2+dz^2)$

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta \, d\varphi^2\right)$$

$a(t)$ = fator de escala do Universo e DEPENDE DO TEMPO

Imaginem o Universo a ficar cada vez maior!

k = CURVATURA DO ESPAÇO

$k>0$ CURVATURA POSITIVA

$k=0$ O ESPAÇO É PLANO

$k<0$ CURVATURA NEGATIVA

[K É UMA CONSTANTE]

Equações do Movimento do Universo

eq. Friedmann-Lemaître

$$H^2 = \left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Parâmetro de Hubble

densidade do Universo

c^{te} Gravitacional Universal

c^{te} Cosmológica

PODEMOS DEFINIR A DENSIDADE CRÍTICA ($k=0$, $\Lambda=0$)

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

($\rho_c \cong 6$ átomos de hidrogênio por m^3)

E A PARTIR DAQUI DEFINIR UM PARÂMETRO DESIGNADO POR DENSIDADE COSMOLÓGICA Ω

$$\Omega = \rho / \rho_c$$

Reorganizando os termos da Eq. de Friedmann-Lemaître:

$$\frac{K}{a^2} = H^2 \left\{ \frac{8\pi G}{3H^2}\rho + \frac{\Lambda}{3H^2} - 1 \right\}$$

$$\frac{K}{a^2} = H^2 \left\{ \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - 1 \right\}$$

$\Rightarrow$ EXISTEM VÁRIAS CONTRIBUIÇÕES PARA A DENSIDADE DO UNIVERSO

Ω_m = densidade de matéria

Ω_R = densidade de partículas relativísticas como os fótons, que produzem pressão positiva

Ω_Λ = contribuição por parte da constante cosmológica

[A CONSTANTE COSMOLÓGICA FOI INTRODUZIDA PARA CRIAR UM UNIVERSO ESTÁTICO]

DE ACORDO COM O TERMO DOMINANTE (Ω_m, Ω_R, Ω_Λ) PODEMOS DIZER QUE O UNIVERSO É DOMINADO:

- PELA MATÉRIA (Ω_m domina, $a(t) \propto t^{2/3}$) – Pela energia do vácuo (Ω_Λ domina, $a(t) \propto e^{\sqrt{\Lambda/3}\,t}$)
- Pela RADIAÇÃO (Ω_R domina, $a(t) \propto t^{1/2}$)

O OBSERVATÓRIO ESPACIAL PLANCK MEDIU ESTAS DENSIDADES:

$$\begin{cases} \Omega_m \cong 0{,}3158 \\ \Omega_\Lambda \cong 0{,}6842 \\ \Omega_k \cong 0.0 \end{cases}$$

TAXA DE EXPANSÃO DO UNIVERSO (H)

$$v = H_0 r$$

$$H_0 = 67.32 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

ex: uma galáxia a 100 Mpc afasta-se de nós a uma velocidade de 6732 km/s

A) UNIVERSO DOMINADO PELA RADIAÇÃO:

$t \in [0, 10^{-12} s]$

Universo dominado por radiação e pares partícula anti-partícula que se criam e aniquilam

B) À MEDIDA QUE O UNIVERSO VAI EVOLUINDO VAI SER DOMINADO PELA MATÉRIA

Ao fim de 380,000 anos, formam-se os primeiros átomos e o Universo torna-se transparente.

C) IDADE DAS TREVAS [ÁTOMOS SÃO NEUTROS]

[E AINDA NÃO HÁ ESTRELAS]

ESTA ÉPOCA TERMINA AO FIM DE

≈ MIL MILHÕES DE ANOS ≈

primeiras estrelas

O NOSSO SISTEMA SOLAR

FORMOU-SE AO FIM DE 8-9 mil milhões anos

Após o Big-Bang //