Metodo simplex: Quadro incial

A	I	b
$-c$	$\bar{0}$	0

Quadro otimo

$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$

$$\max \; cx$$
$$Ax + Is = b$$
$$x \geq 0$$

Custo reduzido: (quanto tem de aumentar o coeficiente para a variavel se tornar atrativa) é a linha z do quadro ótimo, o **c.r.** de x1 é 5.

B é a matriz composta pelas colunas das variaveis basicas na matriz de coeficientes das restrições originais. Exemplo: max: 30x1+20x2+10x3

Matriz de coeficientes depois do metodo simplex. (quadro otimo). Variaveis basicas: x3,x2 e s3:

1. **Matriz Original das Restrições (A):**

As restrições do problema são:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 40 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_3 = 150 \end{cases}$$

Em forma matricial:

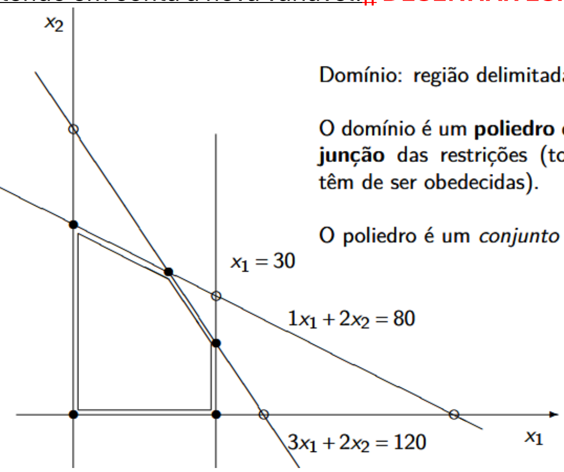
$$A + I = \begin{array}{c} \begin{matrix} x1 & x2 & x3 & s1 & s2 & s3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
x_3	-1/2	0	1	·	1/2	-1/2	0	10
x_2	2	1	0	·	0	1	0	20
s_3	-3/2	0	0	·	-1/2	-3/2	1	100
	5	0	0	·	5	15	0	500

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

C é a matrix de coeficientes(max) C=[30 20 10]. C_B é o vetor de coeficientes da função objetivo associados às variáveis básicas. [10 20 0] (coeficientes de x3, x2 e s3 respetivamente). **POSSIVEL EXERCICIO:** se adicionarmos ou alterarmos variáveis ou os coeficientes, temos de voltar a calcular o $\mathbf{C_B{*}B^{-1}{*}A\text{-}c}$ ou $\mathbf{B^{-1}{*}b}$, se <0, quer dizer que a mudança é atrativa e há alterações na base ótima. **POSSIVEL EXERCICIO:** se perguntar como podemos alterar os coeficientes de forma a nao <u>mudar as variáveis basicas, temos de nos certificar que $\mathbf{C_B{*}B^{-1}{*}A\text{-}c}$, $\mathbf{C_B{*}B^{-1}}$ e $\mathbf{B^{-1}{*}b}$ >= 0 tendo em conta a nova variavel.</u>|| **DESENHAR ESPACO DE SOLUÇOES E RESOLVER SOLUCAO OTIMA(1)** Desenhamos um referencial x1, x2, passamos as restricoes para retas no gráfico que definem um poligono convexo. **Exemplo**: max z = 12 x_1 +10x_2. Restriçoes: 3x_1 + 2 x_2 ≤ 120; x_1 + 2 x_2 ≤ 80; x_1 ≤ 30; x_1, x_2 ≥ 0.

- O gradiente da função objectivo, $\tilde{c} = \nabla z = \frac{\partial z}{\partial x}$, é o vetor que indica a direção em que a função objectivo aumenta mais por unidade de espaço.
- O vector gradiente c é perpendicular à recta cx = ˜z, qualquer que seja o valor da constante ˜z. (2)Aquela reta é movida para a direita ou esquerda. O ultimo ponto que interseta essa reta é a solução ótima(3): Existe **sempre** um vértice que é uma solução ótima

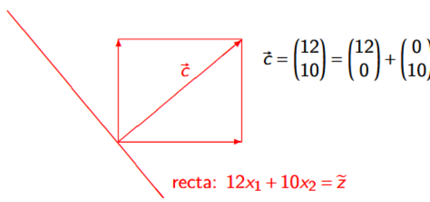


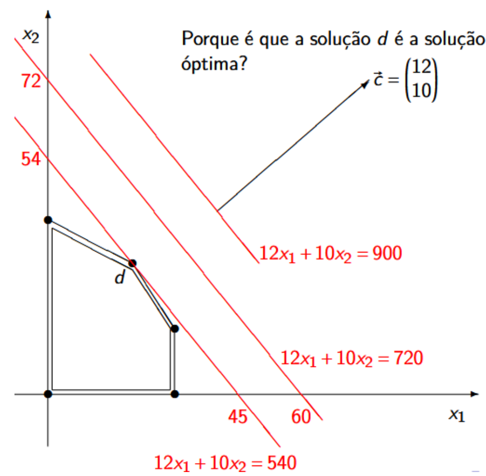
Domínio: região delimitada a duplo traço.

O domínio é um **poliedro** definido pela **conjunção** das restrições (todas as restrições têm de ser obedecidas).

O poliedro é um *conjunto convexo.*

Exemplo: $z = cx = 12x_1 + 10x_2 \rightarrow \nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^T = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$





VARIAVEIS BASICAS: variaveis basicas sao aquelas que tem uma coluna identidade na tabela simplex, o seu valor final na solução ótima é não nulo. As variáveis não básicas têm o valor 0 na solução ótima. O **preço sombra** representa o **aumento marginal no valor da função objetivo** para cada unidade adicional de um recurso específico. Quando existe sobra numa restrição r_n (s_n > 0) o p.s. é 0. O p.s. está na ultima linha da matriz simplex no quadro ótimo. Um p.s. de 15 significa que o <u>aumento dessa restrição em uma unidade aumentaria a função objetivo em 15 unidades.</u>

DUAL E PRIMAL

$$\begin{array}{ll} \max & 1x_1 + 3x_2 \\ \text{suj.} & 1x_1 + 1x_2 \leq 6 \quad y1 \\ & -1x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad y2 \end{array}$$

r1 r2

dual

min 6y1 + 6y2

suj y1-y2 >=1

y1 + 2y2 >=3

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	2/3	-1/3	2
x_2	0	1	1/3	1/3	4
	0	0	$\boxed{5/3}$	$\boxed{2/3}$	14

solução y1 soluçao y2

Os coeficientes das variáveis de folga (s1 e s2) na linha da função objetivo do quadro ótimo correspondem aos valores das variáveis duais y1 e y2. y1=5/3, y2 = 2/3.

Teorema da dualidade fraca

O valor da função objectivo ($c\hat{x}$) de qualquer solução admissível $\hat{x}$ do problema primal (de maximização) e

o valor de função objectivo ($\hat{y}b$) de qualquer solução admissível $\hat{y}$ do problema dual (de minimização)

obedecem à seguinte relação: $\quad c\hat{x} \leq \hat{y}b$

Corolário (do teorema da dualidade fraca)

Se o problema primal de maximização tiver uma solução óptima ilimitada, então o problema dual é impossível.

e reciprocamente:

Se o problema dual de minimização tiver uma solução óptima ilimitada, então o problema primal é impossível.

Teorema

Se o problema primal tiver uma solução óptima com valor finito, então o problema dual tem, pelo menos, uma solução óptima com valor finito, e os valores das soluções óptimas são iguais, $\quad cx^* = y^*b.$

Sendo x* solução ótima do primal e y* solução ótima do dual.

Teorema

No ponto óptimo, se uma variável for positiva, a variável dual correspondente é nula.

Regra de correspondência:

var. folga de uma restrição ≙ var. decisão dual associada à restrição

Parte 2:

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: fluxo de *um único tipo de entidades* no arco orientado (i,j);

Dados:

- c_{ij}: custo unitário de transporte no arco orientado (i,j);
- b_j: oferta (valor positivo) ou procura (valor negativo) no vértice j;
- u_{ij}: capacidade do arco orientado (i,j).

- Restrições (1) designam-se por *restrições de conservação de fluxo.*
- Restrições (2) designam-se por *restrições de capacidade.*

Para os arcos (i,j) básicos, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$

Para os arcos (i,j) não-básicos, calcular:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$

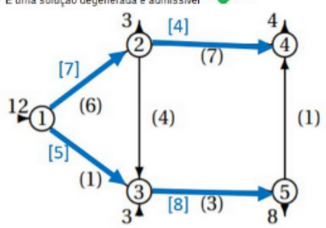
3	20 6	5	2	20
30 2	5	20 5	2	50
1	2	3	30 4	30
30	20	20	30	

Verificar:
Básica: n+m-1= nº de números nas células
Admissível: Somas dos valores das linhas e colunas têm de ser iguais
Degenerado: Tem de existir pelo menos um 0 nas células

As variáveis básicas são aquelas que têm fluxo(xij) >=0 (nº grande). Neste caso: BD,AE,BF,CG. O nº pequeno é o custo(cij).

○ É uma solução degenerada e admissível

Os nºs de fora da tabela sao as disponibilidades nas origens e as procuras nos destinos. Variáveis atrativas são aquelas para as quais o fluxo atual xij = 0 e cuja inclusão na base reduziria o custo total. Para identificá-las, primeiro calculam-se os multiplicadores ui e vj para todas as células básicas, de modo que ui + vj = cij. Depois, para cada célula não-básica (i,j), calcula-se o custo reduzido Δij = cij − (ui + vj). Todas as variáveis com Δij<0 são consideradas atrativas, sendo a mais atrativa aq uela cujo Δij for mais negativo. Quando todos os Δij≥0, a solução atual é ótima e não existem variáveis atrativas. (u e v sao multiplicadores das origens e dos destinos.) Quando um problema fixa um multiplicador e pede para calcular o resto usamos Cij=ui-uj sendo que Cij é o custo de transporte escrito no grafo. Daí pegamos no inicial e calculamos todos.



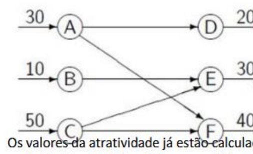
Aumentar o Fluxo no arco(5,4), logo fica +téta.
Saber os sinais dos tétas, andar no sentido da seta é +, sentido oposto é –
Ao adicionar +téta no arco(5.4), vai ficar um ciclo, depois adicionamos o valor dos tétas conforme o sentido das setas.

Após efectuar os devidos cálculos, determinou-se que se deveria aumentar o fluxo no arco (5,4), por essa variável ser atractiva. Como se deveriam alterar os fluxos nos restantes arcos?

○ decrementar x24, aumentar x23, aumentar x35
○ decrementar x24, aumentar x12, decrementar x13, aumentar x35
○ aumentar x24, aumentar x12, decrementar x13, decrementar x35
○ decrementar x24, decrementar x12, aumentar x13, aumentar x35

Seleccione a opção correcta. Considere a iteração da resolução de um problema de transportes de minimização correspondente ao seguinte quadro:

	-3 D	-4 E	-5 F	
0 A	20 3	+2 6	10 5	30
1 B	−2 2	10 5	−1 5	10
-2 C	0 1	20 2	30 3	50
	20	30	40	



Os valores da atratividade já estão calculados, valor mais negativo é a mais atrativa. Ex. BD = -2, logo por +téta para aumentar.
De seguida acrescentar o +téta e -téta de acordo com os valores que estão fora da tabela relacionado com as linhas e colunas.
Problema de minimização valores <0, o mais negativo é solução atrativa
Problema de maximização valores >0, o mais positivo é solução atrativa

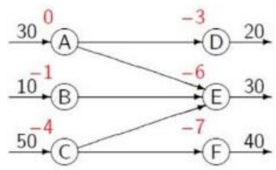
Qual o pivô a efectuar para prosseguir?

○ incrementar xBD, decrementar xBE, incrementar xAE, decrementar xAD
○ incrementar xAE, decrementar xCE, incrementar xCF, decrementar xAF
○ incrementar xBD, decrementar xAD, incrementar xAF, decrementar xCF, incrementar xCE, decrementar xBE

Qd escolhemos variável xBD para entrar na base encontrarmos o **ciclo** que começa e termina em B passando apenas por arcos da base. B → D → A → F → C → E → B neste caso.

Seleccione a opção correcta. Na aplicação do método dos multiplicadores a um problema de transporte de minimização, determinaram-se os seguintes valores de multiplicadores associados aos vértices.

u_i \ v_j	−3 D	−6 E	−7 F	
0 A	20 3	10 6	5	30
−1 B	2	10 5	5	10
−4 C	1	10 2	40 3	50



Calcular para todas as variáveis para saber qual é a mais atrativa, calcular onde não tem números grandes, ex. BD, AF, CD, BF
Cij - Ui + Vj , sendo o Ui é de origem e o Vj é de destino
Ex: exercício começa com BD= 2 – (-1) + (-3), logo BD= 0
xBA e xCA estão na mesma origem, não dá para calcular

Qual a variável não-básica mais atractiva?

○ xAF
○ xBF
○ xBA
○ xCA

Problemas de árvores: Quando maximização, os filhos não podem ser superiores aos pais, se for minimização os filhos são superiores aos pais. Solução básica: fluxo positivo e n vértices é (n - 1). Depois de calcular o Δij:
- Problema de minimização: valores <0, o mais negativo é solução atrativa. solução ótima, todos os valores são >=0
- Problema de maximização valores >0, o mais positivo é solução atrativa. solução ótima, todos os valores são <=0. Uma solução degenerada de um problema de transporte num grafo bipartido com n origens e n destinos pode ter apenas n variáveis com fluxo positivo.

Seleccione a opção correcta, Considere o seguinte problema de programação inteira e a solução óptima da respectiva relaxação linear:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + 2x_2 \\
\text{suj.} \quad & 2x_1 - x_2 \le 2 \\
& -x_1 + 3x_2 \le 3 \\
& x_1,\ x_2 \ge 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

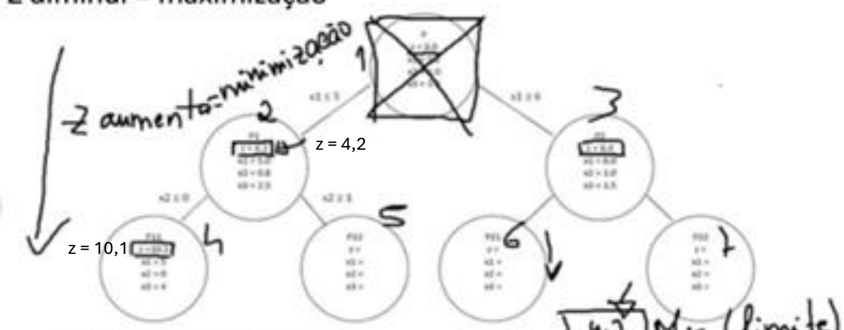
	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_2	0	1	1/5	2/5	8/5
x_1	1	0	3/5	1/5	9/5
	0	0	6/5	8/5	34/5

Para prosseguir a resolução do problema através do método de planos de corte, qual o plano de corte que deveria utilizar?

○ 1/5 s1 + 2/5 s2 >= 3/5
○ não é necessário usar planos de corte, porque a solução é óptima
○ 3/5 s1 + 1/5 s2 >= 9/5
○ 3/5 s1 + 1/5 s2 >= 4/5

Calcular na tabela mais á direita o valor mais fracionário.
Ex: o mais fracionário é o 9/5, logo escolhemos essa linha para os cálculos.
A linha escolhida, o X é sempre 1.
Fazer: 1x1 + 0x2 + 3/5s1 + 1/5s2 >= 9/5
(=) 1 + 0 + 3/5s1 + 1/5s2 >= 9/5 - 1
(=) 3/5s1 + 1/5s2 >= 4/5

Função objetivo= símbolo Z
Z aumenta = minimização
Z diminui = maximização



☐ Trata-se de um problema de maximização.
☐ Trata-se de um problema de minimização.
☐ O limite superior para o valor da solução óptima inteira é 10.1
☐ O limite superior para o valor da solução óptima inteira é 6.4
☐ O limite inferior para o valor da solução óptima inteira é 6.4
☐ O limite inferior para o valor da solução óptima inteira é 4.2

```
C:\RELAX4 2013>relax4 <Trabalho2.txt >con:
 END OF READING
 NUMBER OF NODES = 13, NUMBER OF ARCS = 42
 CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
 CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
 ***********************************
 TOTAL SOLUTION TIME =   0. SECS.
 TIME IN INITIALIZATION =   0. SECS.
   2 13   1.
   4 13   1.
   6 9   1.
   7 1   1.
   8 11   1.
   10 5   1.
   12 3   1.
 OPTIMAL COST =    135.
```

Em cima diz: number of nodes = 13
13-1= 12, logo tem de ter 12 variáveis básicas
Na solução apresentada só aparecem 7 resultados de 7 variáveis básicas, ou seja, faltam 5 variáveis básicas q têm o valor 0, então é degenerada

Seleccione a opção correcta. Num modelo de seleção de projetos, se as variáveis binárias A, B e C representarem a seleção dos projetos A, B e C, respetivamente, e pretendermos que a seleção de A exclua a seleção de B e que force a seleção de C, então o modelo deve incluir as seguintes restrições:

○ A <= C, B <= A
○ A + B <= 1, C <= A
○ A + B <= 1, A <= C
○ nenhuma das anteriores

A ou B = 1
Forçar a seleção de C: A<=C

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41}$$

$$
\underset{2 \times 4}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}}
\underset{4 \times 3}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix}}
=
\underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}}
$$