• Se cometer um erro ao escolher a coluna pivô no método simplex (primal) num problema de maximização devido ao sinal do coeficiente da função objetivo não ser adequado: o valor da função objetivo inferiorar.

• Numa solução básica admissível de um problema de programação linear, todos os variáveis têm um valor positivo - Falso

• Se cometer um erro ao escolher a linha pivô no método simplex (primal) num problema de maximização: solução ñ admissível para o problema primal

• Um problema de programação linear pode ter exatamente 2 soluções óptimas - Falso (um problema de PL pode ter exatamente duas soluções básicas óptimas correspondentes aos dois vértices da região admissível, mas todas as soluções na aresta que une esses dois vértices também são óptimas (soluções ñ básicas)

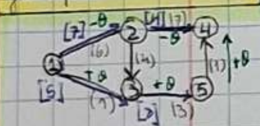
• Adicionar uma restrição a um problema de PL pode melhorar o valor da função objetivo - Falso (ao adicionar uma restrição a um problema de PL, a antiga solução óptima pode tornar-se não admissível. Se isso acontecer o valor óptimo da função objetivo pode piorar mas nunca melhorar

• Uma solução básica de um problema de transporte em rede com m vértices pode ter (m+1) variáveis básicas com fluxo positivo - F

• A árvore de suporte associada a uma solução básica de um problema de transporte com m vértices é um grafo com (m-1) arestas e que ñ tem ciclos - Verdadeiro

• O número de nós explorados na árvore de pesquisa do método de partição e avaliação é o mesmo quer se use o método de pesquisa em largura ou em profundidade. Falso.

• Uma solução degenerada de um problema de transporte num grafo bipartido com m origens e n destinos pode ter apenas m variáveis com fluxo positivo - Verdadeiro.



• Solução admissível se o nº de arcos com fluxo = nº de vértices - 1 = 5 - 1 = 4 ✓

• Variáveis básicas: $x_{12}, x_{13}, x_{24}, x_{35}$

• V. ñ básicas: x_{23}, x_{54}

• Básicos: $c_{ij} = \pi_i - \pi_j$

$c_{12} = \pi_1 - \pi_2 \Leftrightarrow 6 = 0 - \pi_2 \Rightarrow \pi_2 = -6$

$c_{13} = \pi_1 - \pi_3 \Rightarrow 1 = 0 - \pi_3 \Rightarrow \pi_3 = -1$

$c_{24} = \pi_2 - \pi_4 \Rightarrow 7 = -6 - \pi_4 \Rightarrow \pi_4 = -13$

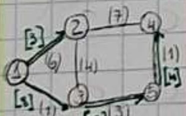
$c_{35} = \pi_3 - \pi_5 \Rightarrow 3 = -1 - \pi_5 \Rightarrow \pi_5 = -4$

• Ñ básicos (ganhos): $\delta_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$

$\delta_{23} = c_{23} - \pi_2 + \pi_3 \Rightarrow \delta_{23} = 4 + 6 - 1 = 9$

$\delta_{54} = c_{54} - \pi_5 + \pi_4 \Rightarrow \delta_{54} = 1 + 4 - 13 = -8$

$\theta = \min([4], [7]) = 4$



• Básicos: $c_{ij} = \pi_i - \pi_j$

$c_{12} = \pi_1 - \pi_2 \Leftrightarrow 6 = 0 - \pi_2 \Rightarrow \pi_2 = -6$

$c_{13} = \pi_1 - \pi_3 \Leftrightarrow 1 = 0 - \pi_3 \Rightarrow \pi_3 = -1$

$c_{35} = \pi_3 - \pi_5 \Leftrightarrow 3 = -1 - \pi_5 \Rightarrow \pi_5 = -4$

$c_{54} = \pi_5 - \pi_4 \Leftrightarrow 1 = -4 - \pi_4 \Rightarrow \pi_4 = -5$

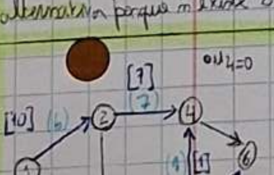
• Ñ básicos (ganhos): $\delta_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$

$\delta_{23} = c_{23} - \pi_2 + \pi_3 \Rightarrow \delta_{23} = 4 + 6 - 1 = 9$

$\delta_{24} = c_{24} - \pi_2 + \pi_4 \Rightarrow \delta_{24} = 7 + 6 - 5 = 8$

• Solução ótima? Sim, porque todos os $\delta_{ij} \geq 0$

• Não existe nenhuma solução ótima alternativa porque ñ existe $\delta_{ij} = 0$



• $u_4 = 0$

• $c_{24} = u_2 - u_4 \Rightarrow 7 = u_2 - 0 \Rightarrow u_2 = +7$

• $c_{12} = u_1 - u_2 \Rightarrow 6 = u_1 - (+7) \Rightarrow u_1 = 13$

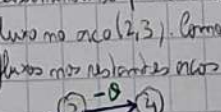
• $c_{54} = u_5 - u_4 \Rightarrow 1 = u_5 - 0 \Rightarrow u_5 = 1$

$c_{35} = u_3 - u_5 \Rightarrow 3 = u_3 - 1 \Rightarrow u_3 = 4$

$c_{56} = u_5 - u_6 \Rightarrow 1 = 1 - u_6 \Rightarrow u_6 = 0$

⚠ Calcular apenas os fluxos aqui onde tem [ ];

• Determinar o que se deveria aumentar o fluxo no arco (2,3). Como deveriam estar os fluxos nos restantes arcos



• transporte de maximização

	-3 D	-6 E	-7 F	
0 A	20 5	10 6	5	30
-1 B	2	10 5	5	10
-4 C	1	10 2	40 3	50

• Calcular $C_{ij} - U_i + V_j$ onde ñ tem números grandes para saber qual é a var. ñ básica + atrativa (U_i origem, V_j destino)

• XBA e XCA ñ dá para calcular estão nos mesmos origem

• BD = 2 - (-1) + (-3) = 0 • BF = 5 - (-1) + (-7) = -1 • AF = 5 - 0 + (-7) = -2

• Variável ñ básica + atrativa AF

δ_{ij} / c_{ij}	$v_1 = -3$ a	$v_2 = -7$ b	$v_3 = -7$ c	
$u_1 = 0$ A	20 30/3	10 30/7	30 30/8	60
$u_2 = -2$ B	20/2	5 20/5	5 20/5	10
$u_3 = -4$ C	40/1	40 40/2	10 40/3	50
	20	55	45	

• Calcular u_i e v_j onde tem números grandes e onde estes números ñ sejam iguais aos limites

• $u_i - v_j = c_{ij}$

• $u_1 - v_1 = 3 \Rightarrow 0 - v_1 = 3 \Rightarrow v_1 = -3$

• $u_1 - v_2 = 7 \Leftrightarrow 0 - v_2 = 7 \Rightarrow v_2 = -7$

• $u_2 - v_2 = 5 \Rightarrow u_2 - (-7) = 5 \Rightarrow u_2 = -2$

• $u_2 - v_3 = 5 \Leftrightarrow -2 - v_3 = 5 \Rightarrow v_3 = -7$

• $u_3 - v_3 = 3 \Rightarrow u_3 - (-7) = 3 \Rightarrow u_3 = -4$

• não podemos usar AC e Cb para os cálculos ⚠ porque o seu valor = limite

o valor δAC é o que se ganha ao diminuir AC

• Custo: $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i + v_j$

• $\delta_{21} = 2 - (-2) + (-3) = 1$ } ñ têm números (têm 0) e são maiores que 0 ⇒ está OK!

• $\delta_{31} = 1 - (-4) + (-3) = 2$

• $\delta_{Cb} = 2 - (-4) + (-7) = -1$ ⇒ como está no limite e o nº é < 0 ⇒ está OK!

$\delta_{AC} = 8 - (0) - 7 = 1$ ⇒ como está no limite e é > 0 ⇒ Não está OK! ⚠

Ab + θ	AC - θ
Bb - θ	BC + θ

$\theta = \min\{Ab, Bb, AC, BC\} = 5$ ⇒ redução de custo efetuada

minimização

	-3 D	-4 E	-5 F	
0 A	20 3	+2 6	10 5	30
1 B	-2 2	10 5	-1 5	10
-2 C	0 1	20 2	30 3	50
	20	30	40	

• os valores da atratividade já estão calculados, o valor mais negativo e mais atrativo é -2 ⇒ BD

AD - θ		AF + θ
BD + θ	BE - θ	
	CE + θ	CF - θ

• ñ podemos ter valores negativos por isso ñ podemos decrementar onde ñ há números

• Problema minimização, valores < 0 ⇒ o mais negativo é mais atrativo

• Problema maximização, valores > 0 ⇒ o mais positivo é mais atrativo

5	20 4	0 1	20
6	10 7	3	10
25 4	3	15 5	40
25	30	15	

• Básica: m + n - 1 = nº de números nas células

• Admissível: soma dos valores das linhas e colunas têm de ser iguais

• Degenerado: tem de existir pelo menos um 0 nas células

• Solução básica, admissível e degenerada

• Sejam ZPL e ZCG os valores da solução óptima da relaxação linear de um problema de programação inteira de MAXimização e do problema que resulta da adição de um plano de corte de Chvátal-Gomory, respetivamente: NÃO: ZPL < ZCG

SIM: ZPL = ZCG; ZPL > ZCG

• Se no quadro simplex na linha dos Z, existir uma variável não básica com custo reduzido igual a 0, então existem soluções ótimas alternativas

• Se todos os coeficientes da coluna pivô forem ≤ 0, então a solução ótima é ilimitada

• Se ao selecionar-se a coluna pivô, houver um empate, então a próxima solução é degenerada; • Uma solução (um vértice) é degenerado quando uma ou mais variáveis têm o valor 0

•

• Seja p um nó da árvore de pesquisa do método de partição e avaliação de um problema de programação inteira de maximização. Seja ZLP(p) o valor da solução óptima da relaxação linear do nó p. Sejam f1 e f2 os dois nós filhos do nó p e ZLP(f1) e ZLP(f2) os valores das soluções óptimas dos respetivos relaxações lineares. Assuma que LP(p) é finito. Qual dos seguintes Não é possível? É possível: as relaxações lineares de LP para f1 e f2 têm ambas um domínio vazio; ZLP(p) = ZLP(f1); ZLP(p) > max{ZLP(f1), ZLP(f2)}; NÃO é possível: ZLP(p) < min{ZLP(f1), ZLP(f2)}

• Como os filhos têm mais restrições que o pai, a relaxação linear dos filhos nunca pode ter valor maior que o pai

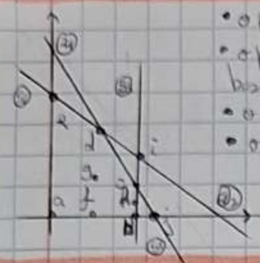
artigo 1: x_1, artigo 2: x_2

• Uma empresa pretende que o nº de artigos 1 não exceda 2/3 do nº total de artigos. Restrição: $\frac{1}{3}x_1 \leq \frac{2}{3}x_2$

• Num modelo de seleção de projetos, se as variáveis binárias ABC representarem a seleção de projeto e pretendermos que a seleção de A exclua a seleção de B e que force a seleção de C, o modelo deve seguir a restrição: $A + B \leq 1$, $A \leq C$

A ou B = 1

Força a seleção de C: $A \leq C$



- o ponto a e o ponto d são soluções básicas admissíveis
- o ponto a e o ponto g são soluções admissíveis, uma básica e outra não básica
- o ponto f e o g são soluções admissíveis não básicas
- o ponto i e o ponto j não são soluções admissíveis
  - no vértice e os variáveis não-básicas são x_1 e s_2

$\max 2x_1 + x_2$

s.a. $x_1 - 2x_2 \le 4$

$x_2 \le 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

básica	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	não básicas
x_1	0	1	0	1	2	8
x_2	0	0	1	0	1	2
	1	0	0	2	5	18

V. básicas: $x_1 = 8$, $x_2 = 2$

Valor ótimo: $Z = 2 \cdot 8 + 2 = 18$

- Quanto pagar para aumentar o recurso da restrição 1? restrição 1: $x_1 - 2x_2 \le 4$ => o valor sombra está na linha dos Z na coluna da variável de folga $s_1 = 2$ => estaríamos dispostos a pagar até 2 u.m. por cada unidade adicional do recurso da restrição 1, pois esse é o ganho marginal no valor ótimo. E pela restrição 2? a variável de folga corresponde a s_2 e estaríamos dispostos a pagar 5 u.m.

$\max x_1 + 3x_2$

s.a. $x_1 + x_2 \le 6$ (y_1)

$-x_1 + 2x_2 \le 6$ (y_2)

$\Downarrow$

dual: $\min 6y_1 + 6y_2$

s.a. $y_1 - y_2 \geq 1$

$y_1 + 2y_2 \geq 3$

$\max 30x_1 + 20x_2 + 10x_3$

s.a. $x_1 + x_2 + 2x_3 \le 40$

$2x_1 + x_2 \le 20$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 150$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
x_3	$-1/2$	0	1	$3/2$	$1/2$	$-1/2$	0	10
x_2	2	1	0	1	0	1	0	20
s_3	$-3/2$	0	0	$-7/2$	$-1/2$	$-3/2$	1	100
básica	5	0	0	-5	5	15	0	500

- Se fosse proposta uma nova atv. x_4 com lucro unitário 40 e coeficientes 4, 1, 0 seria lucrativa?

$A_{x_4} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $c = [40]$ Recalcular $B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ -7/2 \end{bmatrix}$

Recalcular $c_B B^{-1}A - c = [10\ 20\ 0] \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ -7/2 \end{bmatrix} - [40] = [-5]$ Lucrativo!

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
s_1	-1	-1	-1	1	0	-4
s_2	-2	1	-1	0	1	-2
	-2	-3	-5	0	0	0

- no método dual para selecionar a linha pivô selecionamos aquela que tem o valor mais negativo no lado direito (-4); para determinar a variável que entra na base dividimos essa linha pelos Z $(\frac{-2}{-1}, \frac{-3}{-1}, \frac{-5}{-1}, 0, 0)$ e escolhemos o menor (2) => a variável x_1 entra na base e sai s_1

- Se o coef de x_1 fosse de 30 para 25 e simultaneamente o coef de x_2 fosse de 20 para 15. As variáveis básicas da solução ótima alteravam-se?

Novo $c = [25\ 15\ 10]$ | recalcular: $c_B B^{-1}A - c = [10\ 15\ 0] \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - [25\ 15\ 10]$

Novo $c_B = [10\ 15\ 0]$ | $= [25\ 15\ 10] - [25\ 15\ 10]$

$= [0\ 0\ 0] \geq 0$

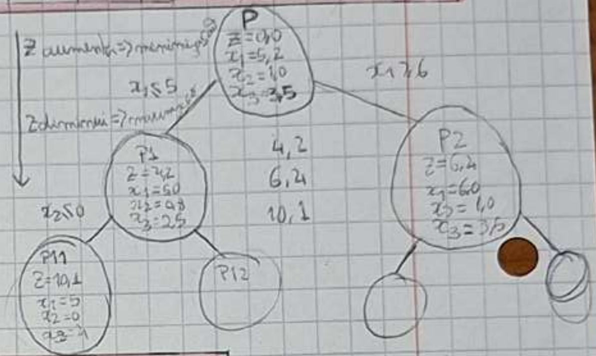
$c_B B^{-1} = [10\ 15\ 0] \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} = [5\ 10\ 0] \geq 0$ | Como são ≥ 0 então não há alterações na base ótima

Quadro Inicial

A	I	b
$-c$	0	0

Quadro ótimo

$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$



- Trata-se de um problema de minimização; o limite superior para o valor da solução ótima inteira é 10.1; o limite inferior para o valor da solução ótima inteira é 4,2

$\max 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$

s.a. $x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq 15$

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

- A 1ª restrição é uma desigualdade "$\geq$" não podemos só adicionar uma variável de folga, temos de subtrair uma variável de excesso e adicionar uma variável artificial
- A 2ª restrição é uma igualdade "=", também exige uma variável artificial porque não há folga.
- 1ª Fase

	z_a	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1		
a_1	0	1	5	-3	-1	1	0	15
a_2	0	1	1	1	0	0	1	5
z_a	1	0	0	0	0	-1	-1	0

(fazer os cortes) : fim da 1ª fase $a_1 + a_2 = 0$

	z_a	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	a_2	
x_2	0	$1/2$	1	0	$-1/8$	$1/8$	$3/8$	$15/4$
x_3	0	$1/2$	0	1	$1/8$	$-1/8$	$5/8$	$5/4$
	1	0	0	0	0	-1	-1	0

- 2ª fase => voltamos a usar a função objetivo original, mas a base atual tem x_2 e x_3 logo passamos a escrever a função em função das variáveis não básicas x_1 e s_1; o objetivo é que os coeficientes de x_2 e x_3 fiquem a 0

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	
x_2	0	$1/2$	1	0	$-1/8$	$15/4$
x_3	0	$1/2$	0	1	$1/8$	$5/4$
z	1	-5	6	7	0	0

$-6L_1$	0	$-6/2$	-6	0	$+6/8$	$-90/4$
$-7L_2$	0	$-7/2$	0	-7	$-7/8$	$-35/4$
$+L_3$	1	-5	6	7	0	0
	1	$-23/2$	0	0	$-1/8$	$-125/4$

substituir

Para prosseguir com a resolução através do modelo de plano de cortes, qual o plano de corte que deveria utilizar?

$\max 2x_1 + 2x_2$

s.a. $2x_1 - x_2 \le 2$

$-x_1 + 3x_2 \le 3$

$x_1, x_2 \geq 0$ e inteiros

R: $3/5\, s_1 + 1/5\, s_2 \geq 4/5$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_2	0	1	$1/5$	$2/5$	$8/5$
x_1	1	0	$3/5$	$1/5$	$9/5$
	0	0	$6/5$	$8/5$	$34/5$

- escolher o valor mais fracionário entre $8/5$ e $9/5$; o valor é $9/5$ então escolhemos essa linha, e como a parte inteira é 1: $1 \times 1 + 0 \times 1 + 3/5 \times s_1 + 1/5 \times s_2 \geq 9/5$ <=> $3/5\, s_1 + 1/5\, s_2 \geq 9/5 - 1$ <=> $3/5\, s_1 + 1/5\, s_2 \geq 4/5$

- No dual de um problema de min é pôr tudo a negativo (inverso) e trocar os sinais $\geq$ por $\le$ e min por max. ~~Ou de max para min~~ trocar

~~min $3x_1 + 5x_2$~~

~~$x_1 + 2x_2 \geq 4$~~ $\neq$>

~~$x_1 + x_2 \geq 6$~~

~~$x_1 + x_2 \geq 0$~~

Novo custo = custo atual + (variação no RHS) x valor dual