Lógica - Ficha 1

1-

a) $(\neg(p_1 \vee p_2))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p_1 \in F^{CP}}\,p_1 \qquad \dfrac{}{p_2 \in F^{CP}}\,p_2}{(p_1 \vee p_2) \in F^{CP}}\,f_\vee}{(\neg(p_1 \vee p_2)) \in F^{CP}}\,f_\neg$$

b) $((p_0 \wedge (\neg p_0)) \to \bot)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p_0 \in F^{CP}}\,p_0 \qquad \dfrac{\dfrac{}{p_0 \in F^{CP}}\,p_0}{(\neg p_0) \in F^{CP}}\,f_\neg}{(p_0 \vee (\neg p_0)) \in F^{CP}}\,f_\vee \qquad \dfrac{}{\bot \in F^{CP}}\,\bot}{((p_0 \vee (\neg p_0)) \to \bot)}\,f_\to$$

c) $((\neg p_5) \to (\neg p_6))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p_5 \in F^{CP}}\,p_5}{(\neg p_5) \in F^{CP}}\,f_\neg \qquad \dfrac{\dfrac{}{p_6 \in F^{CP}}\,p_6}{(\neg p_6) \in F^{CP}}\,f_\neg}{((\neg p_5) \to (\neg p_6)) \in F^{CP}}\,f_\to$$

d) $(\bot) \notin F^{CP}$ (tem parênteses a mais logo ñ é fórmula)

e) $p_1 \wedge p_2 \vee p_3 \notin F^{CP}$ (tem parênteses a menos logo ñ é fórmula)

f) $(((p_2 \to ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \to (p_7 \vee \bot)))$

tem mais parênteses fechados do que abertos logo ñ é fórmula

1.2 -

a) $p : F^{CP} \to \mathbb{N}_0$ $\quad$ $p(\varphi)$ = número de ocorrências de parêntesis

$P(p_i) = 0$

$P(\bot) = 0$

$P((\varphi \square \psi)) = 2 + P(\varphi) + P(\psi)$ $\quad$ $\varphi, \psi \in F^{CP}$

$\square$: $\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$

$P(\neg \varphi) = 2 + P(\varphi)$

b) $v : F^{CP} \to \mathbb{N}_0$ $\quad$ $v(\varphi)$ = nº de ocorrência de vars proposicionais em φ

$v(p_i) = 1$

$v(\bot) = 0$

$v((\varphi \square \psi)) = v(\varphi) + v(\psi)$ $\quad$ $\varphi, \psi \in F^{CP}$

$\square$: $\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$

$v((\neg\varphi)) = v(\varphi)$

c) $b : F^{CP} \to P(BIN)$ $\quad$ $b(\varphi) = \{\square \in BIN : \square \text{ ocorre em } \varphi\}$

$b(p_i) = \emptyset$

$b(\bot) = \emptyset$

$b((\varphi \square \psi)) = \{\square\} \cup b(\varphi) \cup b(\psi)$ $\quad$ $\varphi, \psi \in F^{CP}$

$\square \in BIN$

$b((\neg\varphi)) = b(\varphi)$

d) $[\perp/p_7] : F^{CP} \rightarrow F^{CP}$

$$p_i[\perp/p_7] = \begin{cases} p_i & \text{se } i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{7\} \\ \perp & \text{se } i = 7 \end{cases}$$

$\perp[\perp/p_7] = \perp$

$(\varphi \square \psi)[\perp/p_7] = \varphi[\perp/p_7] \square \psi[\perp/p_7]$ para todo o $\varphi, \psi \in F^{CP}$ e todo o $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

$(\neg\varphi)[\perp/p_7] = \neg\varphi[\perp/p_7]$, para todo $\varphi \in F^{CP}$

1.3 -

b) $v(\varphi) \geq v(\varphi[\perp/p_7])$

i) Caso $\varphi = p_i$

$v(\varphi) = v(p_i) = 1$

$v(\varphi[\perp/p_7]) = v(p_i[\perp/p_7]) \begin{cases} v(\perp) & i = 7 \\ v(p_i) & i \neq 7 \end{cases} = \begin{cases} 0 & i = 7 \\ 1 & i \neq 7 \end{cases}$

Logo $v(p_i) \geq v(p_i[\perp/p_7])$ ou seja $p(p_i)$ é verdadeira.

ii) caso $\varphi = \perp$

- $v(\varphi) = v(\perp) = 0$
- $v(\varphi[\perp/p_7]) = v(\perp[\perp/p_7]) = v(\perp) = 0$

Logo $v(\perp)$

iii) $\varphi = (\varphi_1 \square \varphi_2)$ com $\varphi_1, \varphi_2 \in F^{CP}$

- Por hipótese de indução suponhamos que $p(\varphi_1)$ e $p(\varphi_2)$ são verdadeiras, ou seja, $v(\varphi_1) \geq v(\varphi_1[\perp/p_7])$ e $v(\varphi_2) \geq v(\varphi_2[\perp/p_7])$
- $v(\varphi) = v(\varphi_1 \square \varphi_2) = v(\varphi_1) + v(\varphi_2)$
- $v(\varphi[\perp/p_7]) = v(\varphi_1 \square \varphi_2)[\perp/p_7] = v(\varphi_1[\perp/p_7] \square (\varphi_2[\perp/p_7]))$
- $v(\varphi) = v(\varphi_1) + v(\varphi_2) \underset{\text{por h.i.}}{\geq} v(\varphi_1[\perp/p_7]) + v(\varphi_2[\perp/p_7]) = v(\varphi[\perp/p_7])$

Logo $p(\varphi)$ é verdadeira no caso em que φ é da forma $\varphi = (\varphi_1 \square \varphi_2)$

iv) $\varphi = (\neg\varphi_1)$, com $\varphi_1 \in F^{CP}$

- Por hipótese de indução suponhamos que $v(\neg\varphi_1)$ é verdadeira ou seja $v(\neg\varphi_1) \geq v((\neg\varphi_1 [\perp/p_7]))$

- $v(\varphi) = v(\neg\varphi_1) = v(\varphi_1)$
- $v(\varphi[\perp/p_7]) \underset{\text{por h.i.}}{=} v((\neg\varphi_1)[\perp/p_7]) = v(\neg\varphi_1[\perp/p_7]) = v(\varphi_1[\perp/p_7])$

Logo $p(\varphi)$ é verdadeiro no caso em que φ é da forma $\varphi = (\neg\varphi_1)$

$\therefore$ Por i) – iv) usando o princípio da indução estrutural conclui-se que $p(\varphi)$ é verdadeiro para toda a fórmula de φ de F^{CP}

a) $p(\varphi) \geq \# b(\varphi)$

i) caso $\varphi = p_1$

$p(\varphi) = p(p_1) = 0$

$\# b(\varphi) = \# b(p_1) = \phi$

Logo $p(\varphi) \geq$

d) $P(\varphi)$ significa se $b(\varphi) \neq \phi$ $p(\varphi) > 0$

i) caso $p = p_i \in V^{CP}$

$b(\varphi) = b(p_1) = 0$

Como queremos provar uma implicação em que uma hipotese é falsa então a implicação é verdadeira, ou seja, $P(p_i)$ é verdadeira

ii) caso $\varphi = \perp$

$b(\varphi) = b(\perp) = \phi$

Como queremos provar uma implicação em que uma hipotese é falsa então a implicação é verdadeira, ou seja, $P(\perp)$ é verdadeira

iii) caso $\varphi = (\varphi_1 \square \varphi_2)$ com $\varphi_1, \varphi_2 \in F^{CP}$ e $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

$b(\varphi) = b(\varphi_1 \square \varphi_2) = b(\varphi_1) \cup b(\varphi_2) \cup \{\square\} \neq \phi$

$p(\varphi) = 2 + p(\varphi_1) + p(\varphi_2) > 0$

Como a conclusão ("$p(\varphi) > 0$") é verdadeira então a implicação $P(\varphi)$ é verdadeira

iv) caso $\varphi = (\neg \varphi_1)$ com $\varphi_1 \in F^{CP}$

$b(\varphi) = b(\neg \varphi_1) = b(\varphi)$

$P(\varphi) = P(\neg \varphi_1) = 2 + P(\varphi_1) > 0$

Em conclusão da implica $P(\neg \varphi)$ é verdadeira

∴ Em conclusão, pelo principio da Indução estrutural e por i) – iv), $P(\varphi)$ é verdadeira para todo o $\varphi \in F^{CP}$

1.3-

e) $b(\varphi) = b(\varphi[\perp/p_7])$

i) caso $\varphi = p_i$

$b(\varphi) = b(p_i) = \emptyset$

$b(\varphi[\perp/p_7]) = b(p_i[\perp/p_7]) = \begin{cases} b(\perp) & \text{caso } i = 7 \\ b(p_i) & \text{caso } i \neq 7 \end{cases} = \begin{cases} \emptyset \\ \emptyset \end{cases}$ logo $b(p_i) = b(p_i[\perp/p_7])$

ii) caso $\varphi = \perp$

• $b(\varphi) = b(\perp) = \emptyset$

• $b(\varphi[\perp/p_7]) = b(\perp[\perp/p_7]) = b(\perp) = \emptyset$

logo $b(\perp) = b(\perp[\perp/p_7])$

iii) caso $\varphi = \varphi_1 \square \varphi_2$, com $\varphi_1, \varphi_2 \in F^{CP}$

$b(\varphi) = b(\varphi_1 \square \varphi_2) = \{\square\} \cup b(\varphi_1) \cup b(\varphi_2)$

$b(\varphi[\perp/p_7]) = b((\varphi_1 \square \varphi_2)[\perp/p_7]) = b((\varphi_1[\perp/p_7]) \square (\varphi_2[\perp/p_7])) =$

$= \{\square\} \cup b(\varphi_1[\perp/p_7]) \cup b(\varphi_2[\perp/p_7])$

$b(\varphi) = \{\square\} \cup b(\varphi_1) \cup b(\varphi_2) \underset{\text{por h.i}}{=} \{\square\} \cup b(\varphi_1[\perp/p_7]) \cup b(\varphi_2[\perp/p_7]) = b(\varphi[\perp/p_7])$

iv) $\varphi = (\neg\varphi_1)$ com $\varphi_1 \in F^{CP}$

• $b(\varphi) = b(\neg\varphi_1) = b(\varphi_1)$

• $b(\varphi[\perp/p_7]) = b((\neg\varphi_1)[\perp/p_7]) = b(\varphi_1[\perp/p_7])$

$b(\varphi) = b(\varphi_1) \underset{\text{por h.i}}{=} b(\varphi_1[\perp/p_7]) = b(\varphi[\perp/p_7])$

a)

i) $\varphi[p_2/p_0] = p_{2023}[p_2/p_0] = p_{2023}$

ii) $\varphi[p_2/p_0] = (\neg\bot \vee \bot)[p_2/p_0]$

$= ((\neg\bot)[p_2/p_0]) \vee (\bot[p_2/p_0])$

$= (\neg\bot[p_2/p_0]) \vee (\bot[p_2/p_0])$

$= \neg\bot \vee \bot$

iii) $\varphi[p_2/p_0] = (p_0 \to (\neg p_0 \to \neg p_1))[p_2/p_0]$

$= (p_2 \to (\neg p_2 \to \neg p_1))$

a2)

i)

1.5 -

a) • $|\neg\neg\neg p| = 1 + |\neg\neg p| = 1 + 1 + |\neg p| = 1 + 1 + 1 + |p| = 1 + 1 +$ [illegible]

• $|(p_1 \land p_2) \lor (p_3 \land p_4)| = 1 + |p_1 \land p_2| + |p_3 \land p_4|$

$= 1 + 1 + |p_1| + |p_2| + 1 + |p_3| + |p_4|$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$

b) $|\varphi| = 3$ implica $\varphi \neq p_i$ e $\varphi \neq \bot$ qualquer $i \in \mathbb{N}_0$

• A árvore de derivação é do tipo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi_2 \in F^{CP}}\, f_1}{\neg \varphi_2 \in F^{CP}}\, f_1}{\neg\neg\varphi_2 \in F^{CP}}\, f_1$$

• Então neste caso seria $\varphi_2 \in V^{CP} \cup \{\bot\}$

e $\varphi = \neg\neg\varphi_2$

$|\neg\neg\varphi_2| = 1 + 1 + |\varphi_2| = 1 + 1 + 1 = 3$

Subform $= \{\varphi, \neg\varphi_2, \varphi_2\}$

• A alternativa seria considerar uma árvore de derivação do tipo:

$$\dfrac{\varphi_1 \in F^{CP} \qquad \varphi_2 \in F^{CP}}{\varphi \in F^{CP}}\, f_\square \qquad \square \in \{\land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

• Então φ é do tipo $\varphi = \varphi_1 \square \varphi_2$ e $|\varphi| = |\varphi_1| + 1 + |\varphi_2| \geq 3$

• Como $|\varphi| = 3$ então $|\varphi_1| = |\varphi_2| = 1$ assim $\varphi_1, \varphi_2 \in V^{CP} \cup (\bot)$

Subfórmulas $= \{\varphi\} \cup$ Subform$(\varphi_1) \cup$ Subform$(\varphi_2) = \{\varphi\} \cup \{\varphi_1\} \cup \{\varphi_2\} =$

$$= \begin{cases} \{\varphi, \varphi_1\} & \text{se } \varphi_1 = \varphi_2 \\ \{\varphi, \varphi_1, \varphi_2\} & \text{se } \varphi_1 \neq \varphi_2 \end{cases}$$

• Como φ tem que ter 3 subfórmulas então $\varphi_1 \neq \varphi_2$

Escolhendo...: $\varphi_1 = p_3$, $\varphi_2 = \bot$ e $\square = \land$ então $\varphi(p_3 \land \bot)$

c) $P(\varphi)$ significa $|\varphi| \geq \# \, subf(\varphi)$

· para cada $\varphi \in F^{CP}$

i) caso $\varphi = p_i \in F^{CP}$

$|\varphi| = |p_i| = 1$

$subf(\varphi) = subf(p_i) = \{p_i\}$ Então $|\varphi| = \# \, subf(p_i) = 1$

ii) caso $\varphi = \perp$

$|\varphi| = |\perp| = 1$

$subf(\varphi) = subf(\perp)$ então $|\varphi| = \# \, subf(\varphi) = 1$

iii) caso $\varphi = (\varphi_1 \square \varphi_2)$, como $\varphi_1, \varphi_2 \in F^{CP}$ e $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

· Por hipótese de indução (H.I) admitimos que $|\varphi_1| \geq \# \, subf(\varphi_1)$ e $|\varphi_2| \geq \# \, subf(\varphi_2)$

$|\varphi| = |\varphi_1 \square \varphi_2| = 1 + |\varphi_1| + |\varphi_2|$ $\quad subf(\varphi) = \{\varphi\} \cup subf(\varphi_1) \cup subf(\varphi_2)$

Então $|\varphi| = 1 + |\varphi_1| + |\varphi_2| \geq \# \, subf(\varphi_1) + \# \, subf(\varphi_2) + 1$

$\underset{H.I}{\geq} 1 + \#(subf(\varphi_1) \cup subf(\varphi_2)) = \# \, subf(\varphi_1 \square \varphi_2) = \# \, subf(\varphi)$

Logo, $|\varphi| \geq \# \, subf(\varphi)$ pelo que $p(\varphi_1 \square \varphi_2)$ é verdadeira

iv) caso $\varphi = \neg \varphi_1$ como $\varphi_1 \in F^{CP}$

· Por hipótese de indução suponhamos que $|\varphi_1| \geq \# \, subf(\varphi_1)$

$|\varphi| = |\neg \varphi_1| = 1 + |\varphi_1|$ $\quad subf(\varphi) = \{\varphi\} \cup subf(\varphi_1)$

Então, $|\varphi| = 1 + |\varphi_1| \underset{H.I}{\geq} \# \, subf(\varphi_1) + 1 = \# \, subf(\varphi)$

Logo $|\varphi| \geq subf(\varphi)$, pelo que $p(\neg \varphi_1)$ é verdadeira

∴ Pelo princípio da Indução estrutural e por i) – iv), $P(\varphi)$ é verdadeira para todo $\varphi \in F^{CP}$