→ Lógica - Ficha 2

2 -

2.1 -

- $v_1(\varphi_1) = v_1(p_2 \vee (\neg p_1 \wedge p_3)) = \max\{v_1(p_2), v_1(\neg p_1 \wedge p_3)\}$

$= \max\{v_1(p_2), \min\{v_1(\neg p_1), v_1(p_3)\}\}$

$= \max\{v_1(p_2), \min\{1 - v_1(p_1), v_1(p_3)\}\}$

$= \max\{1, \min\{(1-0), 1\}\}$

$= \max\{1, 1\} = 1$

Ver melhor depois

2.12 //

2.15, 2.16, 2.17

$v(\bot) = 0$

$v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$

$v(\varphi \vee \psi) = \max\{v(\varphi), v(\psi)\}$

$v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\}$

$v(\varphi \to \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$

$v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$

- $v_1(\varphi_2) = v_1((p_2 \vee p_0) \wedge \neg(p_2 \wedge p_0))$

$= \min\{\max\{v_1(p_2), v_1(p_0)\}$

$= \min\{\max\{1, 0\}$

$= \min\{1, 1-0\} =$

- $v_1(\varphi_3) = v_1((p_1 \to ((p_5 \leftrightarrow p_3) \vee \bot$

$= 0 \to ((1 \leftrightarrow 1) \vee \bot)$

$= 0 \to (1 \vee \bot) = 0 \to 1 = 1$

- $v_2(\varphi_1) = v_2(p_2 \vee (\neg p_1 \wedge p_3))$

$= \max\{v_1(p_2), v_2(\neg p_1 \wedge p_3)\}$

$= \max\{0, \min\{(1-1), 1\}\}$

$= \max\{0, 0\} = 0$

- $v_2(\varphi_2) = v_2((p_2 \vee p_0) \wedge \neg(p_2 \wedge p_0))$

$= \min\{\max(p_2, p_0), \min\{p_2, p_0\}\}$

$= \min\{\max\{0, 0\}, \min\{0, 0\}\}$

$= \min\{0, 0\} = 0$

• $V_2(p_3) = V_2((p_1 \to (p_0 \leftrightarrow p_3) \vee \bot)$
$= 1 \to ((0 \leftrightarrow 1) \vee \bot)$
$= 1 \to (0 \vee \bot) = 0$

2.2-

a)

• Pretende-se determinar uma valoração v tal que $v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = 1$

• $\varphi_1 = \neg p_3 \wedge (\neg p_1 \vee p_2)$

• $\varphi_2 = (\neg p_3 \vee \neg p_1) \leftrightarrow (p_1 \to p_2)$

• $v(\varphi_1) = \min\{v(\neg p_3), v(\neg p_1 \vee p_2)\} = \min\{1 - v(p_3), \max\{v(\neg p_1), v(p_2)\}\}$

$= \min\{1 - v(p_3), \max\{1 - v(p_1), v(p_2)\}\}$

• Assim, se $v(\varphi_1)$ então $1 - v(p_3) = 1$ e $\max\{1 - v(p_1), v(p_2)\} = 1$, ou seja $v(p_3) = 0$ e $1 - v(p_1) = 1$ ou $v(p_2) = 1$, ou seja, $v(p_3)$ e $v(p_1) = 0$ ou $v(p_2) = 1$

ou seja, para $v(\varphi_1) = 1$, $v(p_3) = v(p_1) = 0$ ou $v(p_3) = 0$ e $v(p_2) = 1$

• Vamos calcular $v(\varphi_2)$ supondo que $v(p_3) = v(p_1) = 0$

$v(\varphi_2) = 1$ se $v(\neg p_3 \vee \neg p_1) = v(p_1 \to p_2)$, ou seja

se $\max\{1 - v(p_3), 1 - v(p_1)\} = v(p_1 \to p_2)$

• $\max\{v(\neg p_3), v(\neg p_1)\} = \max\{(1 - v(p_3)), 1 - v(p_1)\} = \max\{1 - 0, 1 - 0\}$
$= 1$

$v(p_1 \to p_2)$ se $v(p_1) = 0$ $v(p_2) = 1$

Como $v(p_1) = 0$ então $v(p_1 \to p_2) = 1$

Então $v(\varphi_2) = 1$

• Um ex de uma valoração nas condições do enunciado

$$\begin{cases} v(p_1) = v(p_3) = 0 \\ v(p_i) = 0 \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 3\}$$

a) Cont.

- Pretende-se determinar uma valoração v tal que $v(\varphi_2) = v(\varphi_3) = 1$
  - $\varphi_2 = (\neg\varphi_3 \vee \neg p_1) \leftrightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$
  - $\varphi_3 = \neg p_3 \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_2)$

- Para φ_2 ter valoração 1 $v(\neg\varphi_3 \vee \neg\varphi_1) = v(p_1 \rightarrow p^2)$

- Para φ_3 ter valoração 1 $v(\neg p_3) \neq 1$ se $v(p_1 \wedge \neg p_2) = 0$

b) Admitamos que existe uma valoração v tal que $v(\varphi_1) = 1$ e $v(\varphi_3) = 1$

$$v(\varphi_1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} v(\neg p_3) = 1 & (*) \\ v(\neg p_1 \vee p_2) = 1 & (**) \end{cases}$$

$$(*) \left.\begin{array}{l} v(\neg p_3) = 1 \\ v(\varphi_3) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow v(p_1 \wedge \neg p_2) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} v(p_1) = 1 \\ v(p_2) = 0 \end{cases}$$

- Mas, assim com $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 0$, temos $v(\neg p_1 \vee p_2) = 0$, o que contradiz (**)
- A contradição resultou de supormos que existia uma valoração v tal que $v(\varphi_1) = v(\varphi_3) = 1$. Portanto não existe uma tal valoração.

2.3

a) tautologia

b) tautologia

c) nem tautologia nem contradição

d) contradição

- Um conjunto de formulas Γ diz-se:

  → semanticamente consistente se existir pelo menos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$

  → semanticamente inconsistente se todas as valorações de v forem falsas, isto é, $v \not\models \Gamma$

2.4-

a) $\models \varphi \wedge \psi$ se e só se $\models \varphi$ e $\models \psi$

- Suponhamos por hipótese que $\models \varphi \wedge \psi$, ou seja, para qualquer valoração v, $v(\varphi \wedge \psi) = 1$

- Para provar a conjunção começamos por assumir que $\not\models \varphi$, ou seja, existe pelo menos uma valoração v' tal que $v'(\varphi) = 1$

- Seja v'' uma valoração qualquer. Então, pela hipótese $v''(\varphi \wedge \psi) = 1$ mas, ou $v'(\varphi) = v''(\varphi) = 1$ ou, caso contrário $v''(\varphi)$ 1

- No 1º caso, seria $v''(\psi) = 1$. Caso contrário, $v''(\psi) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$\varphi = p_0$

$\psi = \neg p_0$

e uma valoração $v(p_0) = 1$

Temos $p_0 \wedge \neg p_0$ é uma contradição mas $v(\varphi) = v(\psi) = 1$ logo $\models \varphi \wedge \psi$

b) Se $\models \varphi \vee \psi$ então $\models \varphi$ ou $\models \psi$

- Suponhamos por hipótese, que $\models \varphi \vee \psi$, ou seja, para qualquer valoração v, $v(\varphi \wedge \psi) = 1$

- Para provar a disjunção começamos por assumir que $\not\models \varphi$, ou seja, existe pelo menos uma valoração v', tal que $v'(\varphi) = 0$

- Seja v'' uma valoração qualquer

- Então, pela hipótese, $v''(\varphi \vee \psi) = 1$. Mas, ou $v''(\varphi) = v'(\varphi) = 0$, ou caso contrário, $v''(\varphi) = 1$

b) cont.

• No 1º caso seria $v''(\psi) = 1$. Caso contrário, $v''(\psi) = 0$,

$\varphi = p_0$

$\psi = \neg p_0$ e v uma valoração tal que $v(p_0) = 1$

• Temos $p_0 \vee \neg p_0$ é tautologia, mas $v(\varphi) = v(p_0) = 1$ e $v(\psi) = v(\neg p_0) = 0$. Mas, existe valoração v', tal que $v'(p_0) = 0$. Logo, $\nvDash \psi$.

c) Se $\vDash \varphi$ ou $\vDash \psi$, então $\varphi \vee \psi$

• Suponhamos que $\vDash \varphi$ ou $\vDash \psi$

• Seja v uma valoração qualquer

Caso $\vDash \varphi$, $v(\varphi) = 1$, donde $v(\varphi \vee \psi) = \max\{v(\varphi), v(\psi)\} =$
$= \max\{1, v(\psi)\} = 1$

Caso $\vDash \psi$, e $v(\psi) = 1$, donde $v(\varphi \vee \psi) = \max\{v(\varphi), v(\psi)\} =$
$= \max\{v(\varphi), 1\} = 1$

• Em qualquer um dos casos $v(\varphi \vee \psi) = 1$

• Como v é qualquer $\vDash \varphi \vee \psi$

d) Se $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$ e $\nvDash \psi$, então $\nvDash \varphi$

• Por hipótese suponhamos que $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$ e que $\nvDash \psi$ ou seja, para qualquer valoração $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ e existe pelo menos uma valoração v' tal que $v'(\psi) = 0$

• Neste contexto $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ e $v'(\psi) = 0$, pelo que $v'(\varphi) = v'(\psi) = 0$

Logo $\nvDash \varphi$. A afirmação é verdadeira

2.6-

a) • O conjunto $F^{CP}_{\{\vee, \wedge\}}$ define-se indutivamente por:

1) $p_i \in F^{CP}_{\{\vee, \wedge\}}$ para qualquer $i \in \mathbb{N}_0$

2) $\perp \notin$

2) Se $\varphi, \psi \in F^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$ então

i) $\varphi \vee \psi \in F^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$

ii) $\varphi \wedge \psi \in F^{CP}_{\{\wedge,\vee\}}$

3) $\neg \varphi \notin$

- Teorema da indução estrutural em $F^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$
- Seja P uma propriedade relativa a fórmulas do cálculo proposicional

Se

1) $P(p_i)$ é verdadeira para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

2) Se $\varphi, \psi \in F^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$ e $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ são verdadeiros então:

i) $P(\varphi \vee \psi)$ é verdadeira

ii) $P(\varphi \wedge \psi)$ é verdadeira

- Então $P(\varphi)$ é verdadeira para todo $\varphi \in F^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$

b) - Para qualquer $\varphi \in F^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$, $P(\varphi)$ significa que $v(\varphi) = 0$ sendo v uma valoração tal que $v(p_i) = 0$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$

- Seja v uma valoração tal que $v(p_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$

1) $v(p_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Assim $P(p_i)$ é verdadeira

2) Por hipótese, suponhamos que $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ são verdadeiros

i) $v(\varphi \vee \psi) = \max\{v(\varphi), v(\psi)\} \underset{h.i}{=} \max\{0,0\} = 0$

ii) $v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\} \underset{h.i}{=} \min\{0,0\} = 0$

- Assim, $P(\varphi \vee \psi)$ e $P(\varphi \wedge \psi)$ é verdadeira.

1-

$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

a) $(p_0 \wedge p_2) \to p_3 \Leftrightarrow \neg(p_0 \wedge p_2) \vee p_3$

dupla negação $\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p_0 \vee \neg p_2)) \vee p_3$

$\Leftrightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_2) \vee p_3$

Leis de Morgan

b) $p_1 \vee \overbrace{(p_2 \to \perp)}^{\neg p_2} \Leftrightarrow p_1 \vee \neg p_2$

c) $\neg p_1 \leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow (\neg p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to \neg p_1)$

$\Leftrightarrow (\neg\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_1)$

$\Leftrightarrow (p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_1)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p_1 \vee p_2) \vee \neg(\neg p_2 \vee \neg p_1))$

d) $(p_1 \vee p_2) \to \neg(p_1 \wedge \perp) \Leftrightarrow \neg(p_1 \vee p_2) \vee \neg(p_1 \wedge \perp) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg(p_1 \vee p_2) \vee (\neg p_1 \vee \neg\perp) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\neg(p_1 \vee p_2) \vee (\neg p_1 \vee \neg(p_0 \wedge \neg p_0)) \Leftrightarrow \neg(p_1 \vee p_2) \vee (\neg p_1 \vee \neg p_0 \vee \neg\neg p_0)$

ou

$p_0 \vee \neg p_0$ porque $\neg p_1 \vee \neg\perp \Leftrightarrow \perp$ e $\neg(p_1 \vee p_2) \vee \neg\perp \Leftrightarrow \neg\perp \Leftrightarrow \neg(p_0 \wedge \neg p_0)$

$\Leftrightarrow \neg p_0 \vee \neg\neg p_0 \Leftrightarrow \neg p_0 \vee p_0$

ou//

$\Leftrightarrow \neg(p_1 \vee p_2) \vee \neg(p_1 \wedge \perp) \Leftrightarrow \neg(p_1 \vee p_2$

$\Leftrightarrow \neg p_0 \vee \neg\neg p_0 \Leftrightarrow \neg p_0 \vee p_0$

$(\varphi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

$(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$(\neg\varphi) \Leftrightarrow \varphi \to \perp$

$(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

$(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

$\perp \Leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$

2.8- [illegible]

2.9-

• $\{\vee, \wedge\} \rightarrow$ não é completo porque, por ex, uma tautologia não é logicamente equivalente a uma forma que apenas use $\vee, \wedge$

• $\{\neg, \vee, \wedge\} \rightarrow$ como $\{\neg, \wedge\}$ é um conjunto completo se se acrescentar mais conectivos, continua a ser completo.

2.10-

• Dada uma formula φ, uma formula normal conjuntiva e uma formula normal disjuntiva logicamente equivalentes a φ podem ser obtidos através das seguintes transformações:

1- eliminar equivalências, implicações e ocorrência do absurdo, utilizando as equivalencias lógicas

$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \iff (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$

$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \iff \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$

$\perp \iff \varphi_1 \wedge \neg\varphi_1$

2- Mover negações que se encontram fora de conjuntos ou disjunções para dentro deles, utilizando as leis de Morgan

3- Eliminar duplas negações

4- Aplicar distributividade entre a conjunção e a disjunção

a) $\neg\varphi_0$

$\varphi = \neg\varphi_0$ φ é um literal. Logo é uma FNC e uma FND

$\varphi^c = \neg\varphi_0$; $\varphi^d = \neg\varphi_0$ $\varphi^c \iff \varphi$ é uma FNC

$\varphi^d \iff \varphi$ é uma FND

b) $\varphi = p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3) \iff p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$ que é uma FND e uma FNC

$\varphi^c = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$ $\varphi^d = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$ $\varphi^c \iff \varphi$ e φ^c é uma FNC

$\varphi^d \iff \varphi$ e φ^d é uma FND

10-

c) $(p_1 \vee p_0) \vee \neg(p_2 \vee p_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (p_1 \vee p_0) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_0)$ FND

$\Rightarrow ((p_1 \vee p_0) \vee \neg p_2) \wedge ((p_1 \vee p_0) \vee \neg p_0)$ FNC

d) $(p_1 \to \bot) \Rightarrow$

$\Rightarrow \neg p_1 \vee (p_1 \wedge \neg p_1)$ FND

$\Rightarrow (\neg p_1 \vee p_1) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_1)$ FNC

e) $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_2 \vee (p_1 \wedge p_0))$

$\Rightarrow (p_1 \vee p_0) \wedge (p_2 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee p_0)$ FNC

$\Rightarrow \neg((p_1 \vee p_0) \wedge (p_2 \wedge p_1) \wedge (p_2 \vee p_0))$

$\Rightarrow (\neg p_1 \wedge p_0) \vee (\neg p_2 \vee \neg p_1) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_0)$ FND

$\Rightarrow ((p_1 \vee p_0) \wedge p_2) \vee ((p_1 \wedge p_0) \wedge (p_1 \vee p_0))$ FND

f) $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$

$\Rightarrow ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)) \wedge ((\neg p_2 \to \neg p_1) \to (p_1 \to p_2))$

$\Rightarrow ((\neg p_1 \wedge p_2) \to (p_2 \wedge p_1)) \wedge ((p_2 \wedge \neg p_1) \to (\neg p_1 \wedge p_2))$

$\Rightarrow ((p_1 \vee p_2) \wedge (p_2 \wedge p_1)) \wedge ((\neg p_2 \vee p_1) \wedge (\neg p_1 \wedge p_2))$ FNC

$=$

f- $\varphi = (p_1 \rightarrow p_2) \Leftrightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)$ é uma tautologia

Logo, $\varphi \Leftrightarrow p_0 \vee \neg p_0$, que é simultaneamente uma FNC e uma

$\varphi^c = p_0 \vee \neg p_0$; $\varphi^d = p_0 \vee \neg p_0$

φ^c é uma FNC tal que $\varphi^c \Leftrightarrow \varphi$

φ^d é uma FND tal que $\varphi^d \Leftrightarrow \varphi$

2.11-

- FND
  - $\varphi^d = (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2)$ é uma FND e $\varphi^d \Leftrightarrow \varphi$
  - $\psi^d = (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$ $\vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$ é uma FND e $\psi^d \Leftrightarrow \psi$

- FNC
  - $\varphi^c = (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_2)$ é uma FNC e $\varphi^c \Leftrightarrow \varphi$
  - $\psi^c = (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3)$ é uma FNC e $\psi^c \Leftrightarrow \psi$

2.12-

a)

p_1	p_2	
1	1	?
1	0	?
0	1	?
0	0	?

- Total de 2^4 possibilidades de completar o preenchimento da tabela.

$\therefore$ Logo há 2^4 conectivos binários

?

ver de onde vem isto.

12-

b)

p_1	p_2	$p_1 \lozenge p_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$\leftarrow B_2 = p_1 \wedge \neg p_2$

$\leftarrow B_3 = \neg p_1 \wedge p_2$

Mudar a ordem o padlet ver depois

$p_1 \lozenge p_2 \Rightarrow$

$B_2 \vee B_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2)$

c) • Por b) sabemos que qualquer conectivo binário pode ser traduzido como uma FND, que apenas tem ocorrências dos conectivos $\neg$, $\vee$ e/ou $\wedge$. Logo, para qualquer fórmula do novo conjunto de fórmulas, existiria uma fórmula com conectivos $\{\neg, \vee, \wedge\}$ logicamente equivalentes. Logo, $\{\neg, \vee, \wedge\}$ permaneceria um conjunto completo de conectivos.

2.13-

a) $\Pi = \{p_0 \wedge p_2,\ p_1 \rightarrow \neg p_3,\ p_1 \vee p_2\}$

- Pretendemos verificar se existe alguma valoração v que satisfaça Π
- Ora, uma valoração v é tal que $v \models \Pi$ se $v(p_0 \wedge p_2) = v(p_1 \rightarrow \neg p_3) = v(p_1 \vee p_2) = 1$
- Sabemos que $v(p_0 \wedge p_2) = 1$ se e só se $v(p_0) = v(p_2) = 1$. Se v for tal que $v(p_1) = 0$ temos que $v(p_1 \rightarrow \neg p_3) = 1$. Além disso, se $v(p_2) = 1$, $v(p_1 \vee p_2) = 1$

- Logo, se v é uma valoração tal que $v(p_0) = v(p_2) = 1$ e $v(p_1) = 0$, podemos afirmar que $v \models \Pi$. Assim, Π é consistente

b) $\{p_0 \vee \neg p_1,\ p_1,\ p_0 \leftrightarrow (p_2 \wedge \bot)\}$

- Seja v uma valoração
- Se $v(p_1) = 1$, então $v(p_0 \vee \neg p_1) = 1$
- Mas, se $v(p_1) = 1$ e $v(p_0) = 1$, $v(p_0 \leftrightarrow (p_2 \wedge$

- Portanto, não existe nenhuma valoração v ... sistente

- formulas consistentes existe pelo menos uma valoração que atribui o valor 1 a todas as formulas

- formulas inconsistentes - qualquer que seja a valoração, atribui o valor 0 a uma das formulas. Isto é, nunca todas as formulas são 1.

c) F^{CP}

- Não é possível ter todas as formulas de F^{CP} simultaneamente verdadeiras, Logo, F^{CP} é inconsistente

(Para qq valoração v, $v(p_0) = v(\neg p_0) = 1$ é impossível)

d) $F^{CP}_{\{\wedge, \vee\}}$

- $F^{CP}_{\{\vee, \wedge\}}$ é consistente uma vez que a valoração v tal que $v(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, satisfaz $F^{CP}_{\{\vee, \wedge\}}$. De facto, prova-se por indução estrutural para $F^{CP}_{\{\vee, \wedge\}}$ que $v(\varphi) = 1$, para todo $\varphi \in F^{CP}_{\{\vee, \wedge\}}$ (semelhante a 2.6c))

14-

a) V

• Admitamos que $\Pi \cup \Delta$ é consistente. Então existe uma valoração v t.q. $v \models \Pi \cup \Delta$

• Logo, $v(\varphi) = 1$, para todo $\varphi \in \Pi \cup \Delta$

• Em particular, para todo $\varphi \in \Pi$, $v(\varphi) = 1$. Portanto, $v \models \Pi$ e Π é consistente

• Sabemos também que, para todo $\varphi \in \Delta$, $v(\varphi) = 1$. Logo, $v \models \Delta$ e Δ é consistente

b) F

$\Pi = \{p_1\}$ é consistente

$\Delta = \{\neg p_1\}$ é consistente

• $\Pi \cup \Delta = \{p_1, \neg p_1\}$ é inconsistente porque para qualquer valoração v, $v(p_1) \neq v(\neg p_1)$

Nota:
$\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ $n \in \mathbb{N}$

• φ é consistente se existir uma valoração v tal que $v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = v(\varphi_n) = 1$, ou seja, se $v(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \ldots \wedge \varphi_n) = 1$

c) V

• Suponhamos que Π é tal que Π é consistente, $\varphi \in \Pi$ e $\neg\varphi \in \Pi$. Seja v uma valoração que satisfaça Π. Tal valoração existe uma vez que Π é consistente. Então $v(\varphi) = 1$ e $v(\neg\varphi) = 1$, o que é uma contradição

d) V

• Admitamos que Π contém uma contradição φ. Então, para toda a valoração v, $v(\varphi) = 0$. Logo, nenhuma valoração satisfaz Π e Π é inconsistente