→ Lógica - Ficha 3

3 -

3.2 -

a)

Falta 3.5

3.4 - 3.6

(1) $(\varphi \wedge \psi)$

$(\varphi \vee \psi)$

$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ $\rightarrow I^{(1)}$

b)

$\cancel{\varphi}^{(3)}$ $\quad \cancel{\varphi \rightarrow \psi}^{(2)}$ $\rightarrow E$ $\qquad \cancel{\varphi}^{(3)}$ $\quad \cancel{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)}^{(1)}$ $\rightarrow E$

ψ $\qquad \psi \rightarrow \theta$ $\rightarrow E$

θ $\rightarrow I^{(3)}$

$(\varphi \rightarrow \theta)$ $\rightarrow I^{(2)}$

$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$ $\rightarrow I^{(1)}$

$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \longrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$

- 1 - $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta))$
- 2 - $(\varphi \rightarrow \psi)$
- 3 → φ

c) $$\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)}}{\varphi \to \varphi} \to I\,(1)$$

d)

?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\neg\varphi \vee \psi)^{(1)}}{\psi}\, E_{\vee 2}}{\varphi \to \psi} \to I^{(2)}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)} \to I^{(1)}$$

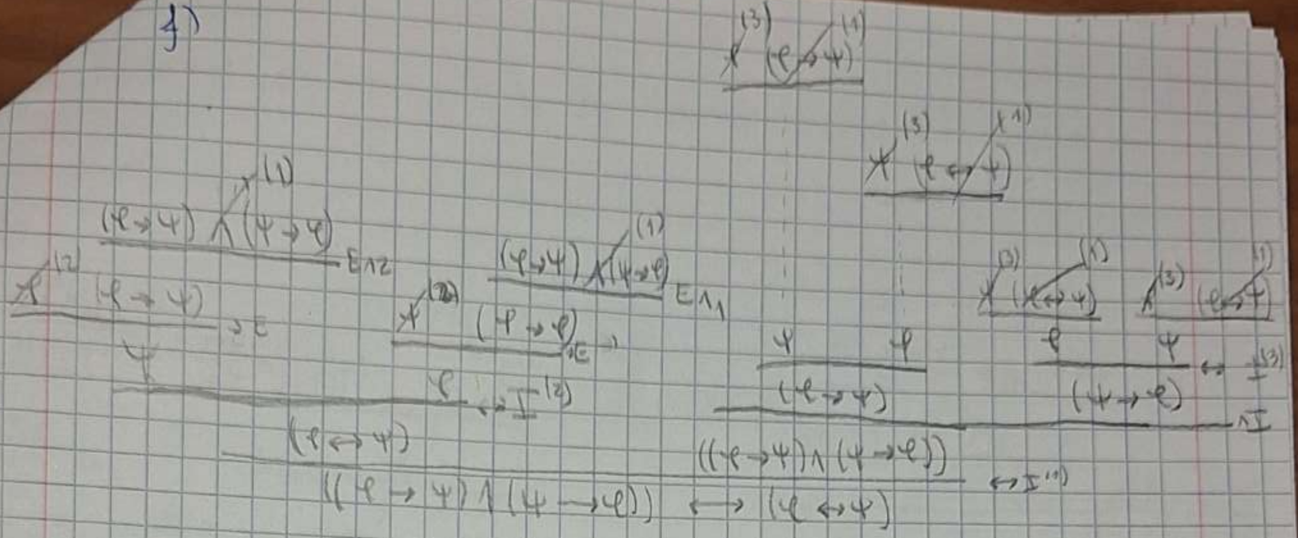
- $1(\neg\varphi \vee \psi)$
- φ

e)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)} \quad \cancel{\neg\varphi}^{(2)}}{\bot}\,\neg E}{\neg\neg\varphi}\,\neg I^{(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi}^{(3)} \quad \cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}}{\bot}}{\varphi}\,RAA}{\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi} \leftrightarrow I^{(1)}$$

- $\neg\neg\varphi\,(1)$; $\varphi\,(1)$
- $\neg\varphi\,(2)$
- $\neg\varphi\,(3)$

f)

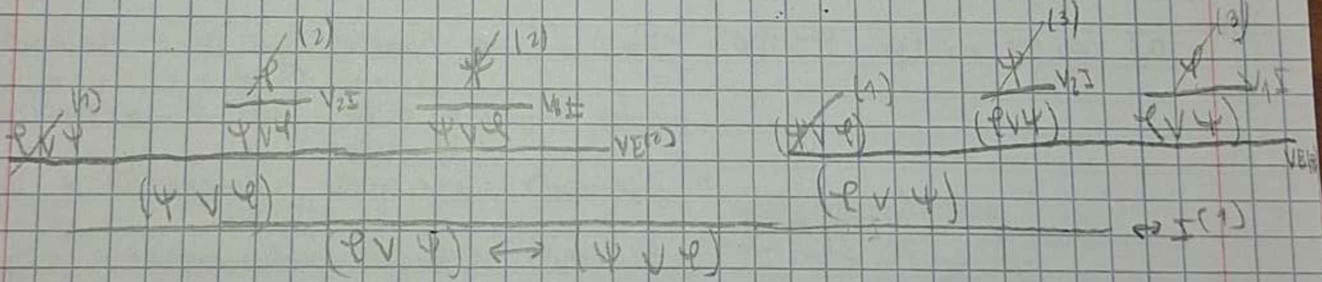


• $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$ (1) ; $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ (1)

• (ψ) (2) (φ) (3)

• (ψ) (3) (φ) (3)

g)



• 1 $(\varphi \vee \psi)$; 1 $(\psi \vee \varphi)$

• 2 φ ; 2 ψ)

• 3 φ ; 3 ψ)

h)

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi\vee\neg\psi}^{(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1E \quad \cancel{\neg\varphi}^{(3)}}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\psi}\wedge_2E \quad \cancel{\neg\psi}^{(3)}}{\bot}}{\dfrac{\bot}{\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)}\neg I^{(2)}}\vee E(3) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi}^{(4)}}{\neg\varphi\vee\neg\psi} \quad \cancel{\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)}^{(1)}}{\bot}}{\varphi}RAA^{(4)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\psi}^{(5)}}{\neg\varphi\vee\neg\psi} \quad \cancel{\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)}^{(1)}}{\bot}}{\psi}RAA(5)}{\varphi\wedge\psi}}{(\varphi\wedge\psi)\leftrightarrow\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)}\leftrightarrow I^{(1)}$$

- 1 $(\varphi\wedge\psi)$; 1 $\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$
- 2 $(\neg\varphi\vee\neg\psi)$ • 5
- 3 $\neg\varphi$ $\neg\psi$
- 4 $\neg\varphi$

3.3 -

a) $p_0\leftrightarrow p_1, \neg p_1 \vdash \neg p_0$ => pretendemos mostrar que $\neg p_0$ é derivável a partir de $p_0\leftrightarrow p_1$ e $\neg p_1$, pretendemos construir uma derivação em que a conclusão é $\neg p_0$ e podemos deixar por cancelar $(p_0\leftrightarrow p_1)$ e $\neg p_1$

para cancelar

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{1} \quad (p_0\leftrightarrow p_1)}{p_1}\leftrightarrow E_1 \qquad \neg p_1}{\bot}\neg E}{\neg p_0}\neg I^{(1)}$$

1 (p_0)

b) $p_0 \to p_1,\ p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_0 \vdash ((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2)) \wedge (p_0 \leftrightarrow p_2)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad p_0 \to p_1}{p_1}\to E \qquad \dfrac{\cancel{p_2}^{(2)} \quad p_2 \to p_0}{p_0}\to E}{(p_0 \leftrightarrow p_1)}\leftrightarrow I^{(1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{p_1}^{(4)} \quad p_1 \to p_2}{p_2}\to E \qquad \dfrac{\cancel{p_2} \quad p_2 \to p_1}{p_1}\to E}{(p_1 \leftrightarrow p_2)}\leftrightarrow I^{(2)}}{((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2))}\wedge I \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(3)} \quad p_0 \to p_2}{p_2}\to E \qquad \dfrac{\cancel{p_2}^{(5)} \quad p_2 \to p_0}{p_0}\to E}{(p_0 \leftrightarrow p_2)}\leftrightarrow I^{3}}{((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2)) \wedge (p_0 \leftrightarrow p_2)}\wedge I$$

1 (p_0), $1(p_1)$ · 2 p_2, p_2 3 p_0, p_2

c) $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$ è sintatticamente inconsistente se .

$p_0 \vee p_1,\ \neg p_0 \wedge \neg p_1 \vdash \bot$

$$\dfrac{p_0 \vee p_1 \qquad \dfrac{\cancel{p_0} \qquad \dfrac{\neg p_0 \wedge \neg p_1}{\neg p_0}}{\bot}\neg E \qquad \dfrac{\cancel{p_1}^{(1)} \qquad \dfrac{\neg p_0 \wedge \neg p_1}{\neg p_1}\wedge_2 E}{\bot}\neg E}{\bot}\vee E(1)$$

3.4-

a) $\Pi \vdash \varphi \wedge \psi$ se e só se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$

Nota: representa o conjunto de hipóteses canceladas de uma derivação

• I) Se $\Pi \vdash \varphi \wedge \psi$ então $\Pi \vdash \varphi$ e $\Pi \vdash \psi$

• Hipótese: existe uma derivação D de conclusão $\varphi \wedge \psi$ tal que $H(D) \subseteq \Pi$

• Tese: existe uma derivação da conclusão φ, D_1 t.q $H(D_1) \subseteq \Pi$ e existe uma derivação da conclusão ψ, D_2 t.q $H(D_2) \subseteq \Pi$

$$\dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi \wedge \psi \end{matrix}}{\varphi} \wedge_1 E$$

• é uma derivação em DNP da conclusão φ cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $H(D) \subseteq \Pi$

$$\dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi \wedge \psi \end{matrix}}{\psi} \wedge_2 E$$

• é uma derivação em DNP de conclusão ψ cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $H(D) \subseteq \Pi$

• II) Se $\Pi \vdash \varphi$ e $\Pi \vdash \psi$ então $\Pi \vdash \varphi \wedge \psi$

• Hipótese: existe uma derivação em DNP D_1 de conclusão φ tal que $H(D_1) \subseteq \Pi$ e

existe uma derivação em DNP D_2 de conclusão ψ t.q $H(D_2) \subseteq \Pi$

• Tese: existe uma derivação em DNP da conclusão $\varphi \wedge \psi$, D t.q. $H(D) \subseteq \Pi$

• Temos que

$$D: \dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \varphi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

é uma derivação em DNP de conclusão $\varphi \wedge \psi$ t.q $H(D) = \underbrace{H(D_1)}_{\subseteq \Pi} \cup \underbrace{H(D_2)}_{\subseteq \Pi} \subseteq \Pi$

∴ Portanto, $\Pi \vdash \varphi \wedge \psi$

a) Resolução alternativa

- Pelo T. da Adequação, sabemos que

$\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ se e só se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$

é equivalente a

$\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ se e só se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \models \psi$

- Temos que

$\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ sse para qq valoração v, se $v \models \Gamma$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 1$

sse para qq valoração v, se $v \models \Gamma$ então $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$

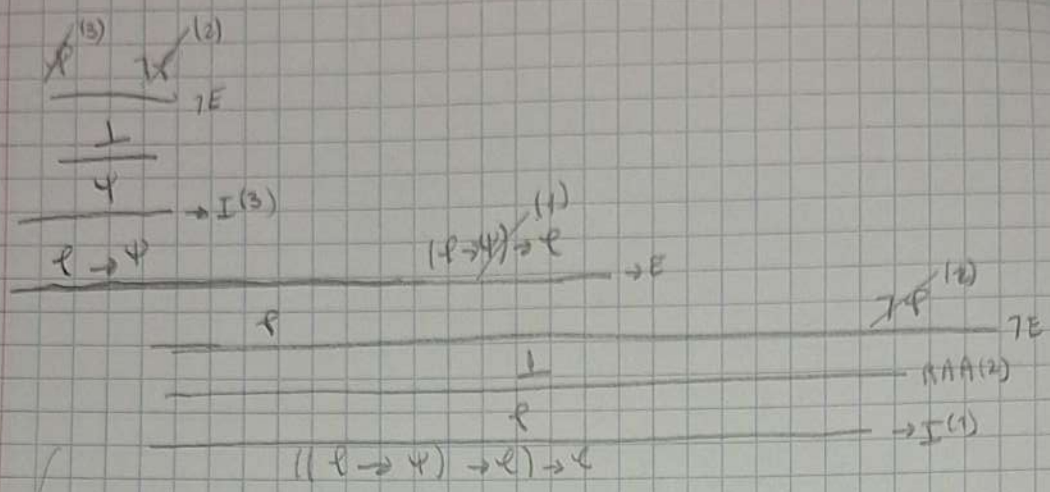
sse para qq valoração v, se $v \models \Gamma$, então $v(\varphi) = 1$

e para qq valoração v, se $v \models \Gamma$, então $v(\psi) = 1$ sse $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \models \psi$

$\therefore$ Assim, $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ se e só se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$

b)

3.5- $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$



é uma demonstração DNP de $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi)$. Portanto,

$\vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi)$

3.6-

a)

- Pelo T. da correção sabemos que se $\nvDash \varphi$ então $\nvdash \varphi$, para qualquer $\varphi \in F^{CP}$
  - Mostremos então que $(p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ não é uma tautologia
- Seja v uma valoração tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = 0$. Temos que

$$v((p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)) = 0$$

pelo que $(p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ não é uma tautologia e por conseguinte $(p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ não é um teorema de DNP

b)

- Pelo T. da correção, se $p_0 \vee p_1 \nvDash p_0 \wedge p_1$ então $p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \wedge p_1$
  - Vejamos então que $p_0 \vee p_1 \nvDash p_0 \wedge p_1$
- Se v é uma valoração $v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = 0$, então $v(p_0 \vee p_1) = 1$ e $v(p_0 \wedge p_1) = 0$

Portanto, $p_0 \vee p_1 \nvDash p_0 \wedge p_1$. Logo $p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \wedge p_1$

c)

- Seja $\Gamma = \{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge p_1\}$. Sabemos que Γ é sintaticamente consistente se e só se Γ é semanticamente consistente.
- Seja v a valoração t.q. $v(p_0) = 0$ e $v(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$

Temos que $v(p_0 \vee p_1) = v(\neg p_0 \wedge p_1) = 1$, donde $v \models \Gamma$. Assim, Γ é semanticamente consistente e, portanto, sintaticamente consistente.