→ Lógica - folha 4

4-

4.1 - $\mathcal{L} = (\{0, f, g\}, \{R\}, N)$

- O conjunto dos termos de tipo $\mathcal{L}$ é definido indutivamente por:

R1) para cada variável $x_i \in V$, $x_i \in T_{\mathcal{L}}$

R2) $0 \in T_{\mathcal{L}}$

R3) i) para qualquer $t_1 \in T_{\mathcal{L}}$, $f(t_1) \in T_{\mathcal{L}}$

ii) para qualquer $t_1, t_2 \in T_{\mathcal{L}}$, $g(t_1, t_2) \in T_{\mathcal{L}}$

b)

i) $0 \in T_{\mathcal{L}}$ por R_2

ii)

$$\frac{0 \in T_{\mathcal{L}} \quad \text{por } R_2}{f(0) \in T_{\mathcal{L}} \quad \text{por } R_3(i)}$$

iii) f é um símbolo de função, mas $1 \in A_{\mathcal{L}}$, pelo que $f(1) \in T_{\mathcal{L}}$

iv) $g(f(x_1, x_0), x_0) \notin T_{\mathcal{L}}$ porque $N(f) = 1$ $(N(f) \neq 2)$

$$\frac{\dfrac{x_1 \in T_{\mathcal{L}} \; ? \; X}{f(x_1, x_0)} \qquad x_0 \in T_{\mathcal{L}}}{g(f(x_1, x_0), x_0) \qquad \text{por } R_3(ii)}$$

v) $g(x_0, f(x_1)) \in T_{\mathcal{L}}$ porque tem a seguinte árvore de formação

$$\frac{x_0 \in T_{\mathcal{L}} \text{ por } R_1 \qquad \dfrac{x_1 \in T_{\mathcal{L}} \text{ por } R_1}{f(x_1) \in T_{\mathcal{L}} \text{ por } R_3(i)}}{g(x_0, f(x_1)) \in T_{\mathcal{L}} \quad \text{por } R_3(ii)}$$

vi) $R(x_0, x_1) \notin T_{\mathcal{L}}$ porque R é um símbolo de predicado e não um símbolo de função

e) $VAR : T_2 \to P(V)$

$x_1 \to \{x_1\}$

$0 \to \{\}$

$f(t_1) \to VAR\{t_1\}$ com $t_1 \in T_2$

$g(t_1, t_2) \to VAR(t_1) \cup VAR(t_2)$ com $t_1, t_2 \in T_2$

d)

i) $VAR(0) = \{\}$

ii) $VAR(g(x_1, f(x_1)) = Var(x_1) \cup Var(f(x_1))$

$= Var(x_1) \cup Var(x_1)$

$= \{x_1\} \cup \{x_1\}$

iii) $Var(g(x_1, x_2)) = Var(x_1) \cup Var(x_2)$

$= \{x_1\} \cup \{x_2\}$

iv) $Var(g(x_1), g(x_2, x_3)) = Var(x_1) \cup Var(g(x_2, x_3))$

$= Var(x_1) \cup Var(x_2) \cup Var(x_3)$

$= \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \{x_3\}$

f)

i) $0[g(x_0, 0)/x_1] = 0$

ii) $g(x_1, f(x_1))[g(x_0, 0)/x_1] = g(g(x_0, 0), f(g(x_0, 0)))$

iii) $g(x_1, x_2)[g(x_0, 0)/x_1] = g(g(x_0, 0), x_2)$

iv) $g(g(x_1), g(x_2, x_3))[g(x_0, 0)/x_1] = g(g(x_0, 0), g(x_2, x_3))$

g)

4.2-

a) $L = (F, R, N)$ usado para definir os L-termos

$F = \{0, -\}$ onde $N(0) = 0$

$N(-) = 2$

Exemplo de termos: $x_1, 0$ ...

T_L definido indutivamente sobre $(A_L)^*$ por:

1) $x_i \in T_L$ para qq $i \in \mathbb{N}_0$

2) $0 \in T_L$

3) $t_1, t_2 \in T_L \Rightarrow \overbrace{-(t_1, t_2)}^{t_1 - t_2} \in T_L$

para todo $t_1, t_2 \in (A_L)^*$

b) P (relação unária) (x_i)

< (relações binárias) $(0, x_1) \rightarrow 0 < x_1$

c) i) $x_2 - 0 < x_1$ é uma fórmula atómica, logo ñ tem ocorrências de quantificadores pelo que todas as ocorrências são livres

$LIV(x_2 - 0 < x_1) = var(x_2 - 0) \cup var(x_1) = \{x_1, x_2\}$

ii) $\exists x_0 \, \forall x_1 \, (x_1 - x_0 < 0)$

• O alcance de $\forall x_1$ é $(x_1 - x_0 < 0)$

• o alcance de $\exists x_0$ é $(\forall x_1 (x_1 - x_0 < 0))$

$LIV(\exists x_0 \, \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0)) = \emptyset$

$LIG(\exists x_0 \, \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0)) = \{x_0, x_1\}$

h) $\exists x_2 (x_1 < x_2) [x_1 - x_3 / x_i] = \begin{cases} \exists x_2 (x_1 - x_3 < x_2) \text{ se } i = 1 \\ \exists x_2 (x_1 < x_2) \text{ se } i \neq 1 \end{cases}$

• Verdadeira, em qualquer caso não houve nenhuma variável que tenha passado a estar capturada pelo $\exists x_2$

4.5-

a) Todo aquele que é persistente aprende lógica

$L = (\{\}, \{P, A\}, N)$, onde $N(P) = N(A) = 1$

$\varphi = \forall x_0 (P(x_0) \to A(x_0))$ ("$\underbrace{\text{para todo o } x}_{\forall x}$, $\underbrace{\text{se } x \text{ é persistente}}_{P(x)}$, então $\underbrace{x \text{ aprende lógica}}_{A(x)}$

b) Quem quer vai, quem não quer manda

↳ Para todo x, se x quer então x vai

&

Para todo o x se x ñ quer então x manda

$L = \{\emptyset, \{V, Q, M\}, N\}$

$N(V) = N(Q) = N(M) = 1$

$(\forall x_1 \; Q(x_1) \to V(x_1)) \land (\forall x_1 \; \neg Q(x_1) \to M(x_1))$

c) Nem todos os pássaros voam

↳ Não é verdade que, para todo o x, x voa

$L = \{\emptyset, \{V\}, N\}$, $N(V) = 1$

$\neg \forall x_0 \; V(x_0)$

e) Para todo o número natural que é maior que 6, o seu dobro é maior que 12

↳ Para todo o x, se x é maior que 6 então o seu dobro é maior que 12

$L = \{\{d, 6, 12\}, \{>\}, N\}$ $N(d) = 1$ $N(6) = N(12) = 0$ $N(>) = 2$

$\forall x_0 ((x_0 > 6) \to (d(x_0) > 12))$

d) Se toda a gente consegue, então o João também consegue

↳ Para todo o x, se todo o x consegue então o João também consegue

$\mathcal{I} = \{\{J\}, \{C\}, N\}$ $N(C) = 1$ $N(J) = 0$

$\forall x,\ C(x,b) \rightarrow B(J)$

h)

- Por hipótese, $t_1, t_2 \in T_L$ tais que $x_1 \notin Var(t_2)$ e $x_2 \notin Var(t_1)$
- Vamos usar o princípio da indução estrutural para T_L

1) $t = x_1 \in V$

- Se $i \neq 1$ e $i \neq 2$ então $x_i[t_1/x_1][t_2/x_2] = x_1$

$$x_i[t_2/x_2][t_1/x_1] = x_i$$

- Se $i = 1$ então $x_1[t_1/x_1][t_2/x_2] = t_1[t_2/x_2] = t_1$

$$x_1[t_2/x_2][t_1/x_1] = x_1[t_1/x_1] = t_1$$

- Se $i = 2$ então $x_2[t_1/x_1][t_2/x_2] = x_2[t_2/x_2] = t_2$

$$x_2[t_2/x_2][t_1/x_1] = t_2[t_1/x_1] = t_2$$

2) Se $t = 0$ então $0[t_1/x_1][t_2/x_2] = 0[t_2/x_2][t_1/x_1]$

3.i) Se $t = f$ com $t' \in T_L$

• Por hipótese de indução suponhamos que $t'[t_1/x_1][t_2/x_2] = t'[t_2/x_2][t_1/x_1]$

$$f(t')[t_1/x_1][t_2/x_2] = f(\underbrace{t'[t_1/x_1]}_{\in T_L})[t_2/x_2]$$

$$= f(t'[t_1/x_1][t_2/x_2])$$

$$\underset{\text{por h.i.}}{=} f(t'[t_2/x_2][t_1/x_1])$$

$$= f(t'[t_2/x_2])[t_1/x_1]$$

$$= f(t')[t_2/x_2][t_1/x_1]$$

3.ii) Se $t = g(t', t'')$ e $t', t'' \in T_L$

• Por hipótese de indução suponhamos que:

$t'[t_1/x_1][t_2/x_2] = t'[t_2/x_2][t_1/x_1]$

e

$t''[t_1/x_1][t_2/x_2] = t''[t_2/x_2][t_1/x_1]$

$$g(t', t'')[t_1/x_1][t_2/x_2] =$$

$$= g(t'[t_1/x_1][t_2/x_2]), t''[t_1/x_1][t_2/x_2])$$

$$\underset{\text{por h.i.}}{=} g(t'[t_2/x_2][t_1/x_1], t''[t_2/x_2][t_1/x_1])$$

$$= g(t', t'')[t_2/x_2][t_1/x_1]$$

o que conclui a prova

4.3- $\varphi[x_2 - x_0 / x_1]$

↳ substituem as ocorrências livres de x em φ pelo termo $x_2 \cdot x_0$

i) $x_2 - 0 < x_1$

↳ ocorrência livre

$\varphi[x_2 \cdot 0 / x_1] = (x_2 - 0 < x_1)[x_2 - 0 / x_1] = x_2 - 0 < x_2 \cdot 0$

ii) $\exists x_0 \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0)$

↳ ocorrência ligada

$\varphi[x_2 \cdot 0 / x_1] = \varphi$ porque $\nexists$ ocorrências livres de x_1

iii) $\underbrace{\forall x_1 \exists x_0 (x_1 < x_0)}_{\text{ocorrência ligada}} \wedge \underbrace{P(x_1)}_{\text{ocorrência livre}}$

$\varphi[x_2 \cdot 0 / x_1] = (\forall x_1 \exists x_0 (x_1 < x_0) \wedge P(x_1))[x_2 \cdot 0 / x_1] =$

$= \forall x_1 \exists x_0 (x_1 < x_0) \wedge P(x_2 \cdot 0)$

iv) $\forall x_0 (x_0 < \underbrace{x_1}_{\text{ocorrência livre}}) \vee \underbrace{\exists x_1 (x_1 < x_0)}_{\text{ocorrência ligada}}$

$\varphi[x_2 \cdot 0 / x_1] = \forall x_0 (x_0 < x_2 \cdot 0) \vee \exists x_1 (x_1 < x_0)$

4.4-

a)

$\mathcal{L} = (\{0, \cdot\}, \{P, <\}, N)$

$N(0) = 0$, $N(\cdot) = N(<) = 2$, $N(P) = 1$

a) A variável x_1 está livre para o termo x_2 na fórmula $x_1 < x_2$ $[x_2 / x_1]$

$(x_1 < x_2)[x_2 / x_1] = x_2 < x_2$

- Como na fórmula $x_1 < x_2$ não ocorre nenhum quantificador a afirmação é verdadeira

b) A variável x_1 está livre para o termo x_2 na fórmula $\exists x_2 (x_1 < x_2)$

$\exists x_2 (x_1 < x_2) [x_2/x_1] = \exists x_2 (x_2 < x_2)$

ocorrência ligada

ocorrência livre

perde-se a e deixa uma ocorrência ligada

• A afirmação é falsa porque a variável x_2, no termo x_2, é capturada pelo quantificador $\exists x_2$

c)

$\exists x_2 (x_1 / x_2) [0/x_1] = \exists x_2 (0 < x_2)$

• A afirmação é verdadeira porque não existe uma variável capturada por $\exists x_2$ (o termo não envolve variáveis

d)

$\forall x_1 \exists x_2 (x_1 < x_2) [x_2/x_1] = \forall x_1 \exists x_2 (x_1 < x_2)$

ocorrência ligada

• Como não há ocorrências livres de x_1, a afirmação é verdadeira

e)

$\exists x_2 (x_1 < x_2) [t/x_2] = \exists x_2 (x_1 < x_2)$

• A afirmação é verdadeira porque não há ocorrências livres de x_2

f)

$\exists x_2 (x_1 < x_2) [t/x_1] = \exists x_2 (t < x_2)$

• A afirmação é falsa, basta considerar b). No geral, x_2 não é livre para t se x_2 ocorre em t

g)

$\exists x_2 (x_1 < x_2) \vee \exists x_1 (x_1 < x_2) [x_1/x_2]$

$= \exists x_2 (x_1 < x_2) [x_1/x_2] \vee \exists x_1 (x_1 < x_2) [x_1/x_2] = \exists x_2 (x_1 < x_1) \vee \exists x_1 (x_1 < x_1)$

• A afirmação é falsa