→ Lógica - Folha 5

5 -

5.1 -

$L = (\{0, s, +, \times\}, \{<, =\}, N)$, onde $N(0)=0$, $N(s)=1$,
$N(+) = N(\times) = N(<) = N(=) = 2$

$\bar{0}$ é o nº zero

$\bar{s}: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ é a função sucessor

$\bar{+}$: é a adição usual em $\mathbb{N}_0$

$\bar{\times}$: é a multiplicação usual em $\mathbb{N}_0$

$\bar{<}$: é a relação "menor do que" em $\mathbb{N}_0$

$\bar{=}$: é a relação igualdade em $\mathbb{N}_0$

$a: V \to \mathbb{N}_0$ função —— atribuição em E_{Arit}

$t \in T_L$

$t[a]_{E_{Arit}}$: valor do L-termo t para a em E_{Arit}

- $x[a]_{E_{Arit}} = a(x)$ para todo o $x \in V$
- $0[a]_{E_{Arit}} = \bar{0}$
- $s(t_1)[a]_{E_{Arit}} = \bar{s}(t_1[a]_{E_{Arit}}) = t_1[a]_{E_{Arit}} + 1$, para todo $t_1 \in T_L$
- $(t_1 + t_2)[a]_{E_{Arit}} = \bar{+}(t_1[a]_{E_{Arit}}, t_2[a]_{E_{Arit}})$
  $= t_1[a]_{E_{Arit}} + t_2[a]_{E_{Arit}}$, para qq $t_1, t_2 \in T_L$
- $(t_1 \times t_2)[a]_{E_{Arit}} = \bar{\times}(t_1[a]_{E_{Arit}}, t_2[a]_{E_{Arit}})$
  $= t_1[a]_{E_{Arit}} \times t_2[a]_{E_{Arit}}$, para qq $t_1, t_2 \in T_L$

a) $a_1(x_i) = 0$, $a_2(x_i) = i$

i) 0

$0[a_1] = \bar{0} = 0$

$0[a_2] = \bar{0} = 0$

ii) x_5

$x_5[a_1] = a_1(x_5) = 0$

$x_5[a_2] = a_2(x_5) = 5$

iii) $s(0) + x_5$

- $s(0) + x_5[a_1] = s(0)[a_1] + x_5[a_1]$
  $= \bar{s}(0[a_1]) + a_1(x_5)$
  $= \bar{s}(\bar{0}) + 0 = (0+1) + 0 = 1$

- $s(0) + x_5[a_2] = \bar{s}(0[a_2]) + a_2(x_5)$
  $= \bar{s}(\bar{0}) + 5$
  $= (0+1) + 5 = 6$

iv) $(S(0) + x_5) \times S(x_1 + x_2)$

- $(S(0) + x_5) \times S(x_1 + x_2)[a_1] = \overbrace{(S(0) + x_5)[a_1]}^{= 1 \text{ por iii)}} \times S(x_1 + x_2)[a_1]$
$$= 1 \times \bar{s}((x_1 + x_2)[a_1])$$
$$= 1 \times \bar{s}(x_1[a_1] + x_2[a_1]) = \bar{s}(a_1(x_1) + a_1(x_2))$$
$$= \bar{s}(0 + 0) = \bar{s}(0) = 0 + 1 = 1$$

- $(s(0) + x_5) \times s(x_1 + x_2)[a_2] = (s(0) + x_5)[a_2] \times s(x_1 + x_2)[a_2]$
$$= 6 \times \bar{s}((x_1 + x_2)[a_2]) =$$
$$= 6 \times \bar{s}(a_2[x_1] + a_2[x_2]) = 6 \times \bar{s}(1+2) = 6 \times 4 = 24$$

b) a atribuição em E $\quad \varphi_E[a]_E$: valor lógico de φ para a em E

$\varphi \in F_L \qquad \in \{0,1\}$

i)
- $= \in R$

$(t_1 = t_2)[a]_{E_{Arit}} = 1$ sse $(t_1[a]_{E_{Arit}}, t_2[a]_{E_{Arit}}) \in \bar{=}$

sse $t_1[a]_{E_{Arit}} = t_2[a]_{E_{Arit}}$

- $(x_1 = x_2)[a_1]$ sse $x_1[a_1] = x_2[a_1]$

sse $a_1[x_1] = a_1[x_2]$

sse $0 = 0$ o que é verdade

Logo $(x_1 = x_2)[a_1] = 1$

- $(x_1 = x_2)[a_2] = 1$ sse $x_1[a_2] = x_2[a_2]$

sse $a_2(x_1) = a_2(x_2)$

sse $1 = 2$ o que é falso

Portanto, $(x_1 = x_2)[a_2] = 0$

b)

ii) $\neg(x_1 \doteq x_2)[a_1] = 0$

$\neg(x_1 \doteq x_2)[a_2] = 1$ $\Big\rangle$ $(\neg\varphi)[a]_E = 1 - \varphi[a]_E$

iii) $< \in R$

$(t_1 < t_2)[a]_{EAnit} = 1$ sse $(t_1[a]_{EAnit}, t_2[a]_{EAnit}) \in \bar{<}$

sse $t_1[a]_{EAnit} < t_2[a]_{EAnit}$

$\varphi = s(x_1) < (x_1 + 0)$

$\varphi[a_1] = 1$ se e só se $s(x_1)[a_1] \bar{<} (x_1 + 0)[a_1]$

sse $(\bar{s}(x_1[a_1]) < (x_1[a_1]) \bar{+} (0[a_1]))$

sse $((x_1[a_1]) + 1) < ((x_1[a_1]) + 0)$

sse $(a_1(x_1) + 1) < ((a_1(x_1)) + 0))$

sse $(0 + 1) < 0 + 0$ o que é falso

Logo, $\varphi[a_1] = 0$

$\varphi[a_2] = 1$ sse $a_2(x_1) + 1 < a_2(x_1) + 0$

sse $1 + 1 < 1 + 0$

sse $2 < 0$, o que é falso

Assim, $\varphi[a_2] = 0$

iv) $\varphi, \psi \in F_L$

$(\varphi \to \psi)[a] = 1$ sse se $\varphi[a] = 1$, então $\psi[a] = 1$

$\varphi = (x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2))$

$\varphi[a_1] = 1$ sse se $(x_1 < x_2)[a] = 1$ então $(s(x_1) < s(x_2))[a_1] = 1$

sse se $a_1(x_1) < a_1(x_2)$, então $\bar{s}(a_1(x_1)) < \bar{s}(a_1(x_2))$

sse $\underbrace{\text{se } 0 < 0 \text{ então } 1 < 1}$

• afirmação verdadeira (0<0 é falso e 1<1 também

Assim, $\varphi[a_1] = 1$ $0 \to 0$ 0 é verdade)

$\varphi[a_2] = 1$ sse se $(x_1 < x_2)[a_2] = 1$, então $(\bar{s}(x_1) < \bar{s}(x_2))[a_2] \ldots$

sse se $a_2(x_1) < a_2(x_2)$, então $\bar{s}(a_2(x_1)) < \bar{s}(a_2(x_2))$

sse $\underbrace{\text{se } 1 < 2 \text{ então } 2 < 3}_{\text{afirmação verdadeira } (1<2 \text{ é verdadeira e } 2<3 \text{ também})}$

Portanto, $\varphi[a_2] = 1$

e)

E L-estrutura

a: atribuição em E

$\varphi \in F_L$

$x \in V$

$\forall x \varphi[a]_E = 1$ sse, para todo $d \in dom(E)$, $\varphi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1$

$a\binom{x}{d}$ atribuição igual a a exceto (eventualmente) na imagem para x que é d

$\exists x \varphi[a]_E = 1$ sse existe $d \in dom(E)$ tal que $\varphi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1$

i) $\varphi = x_1 = x_2$

$\forall x_1 \varphi[a_1] = 1$ sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$ $(x_1 = x_2)\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$ $\left(x_1\left[a_1\binom{x_1}{d}\right], x_2\left[a_1\binom{x_1}{d}\right]\right) \in \bar{=}$

sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$, $(d, a_1(x_2)) \in \bar{=}$

sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$ $d = a_1(x_2)$

sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$, $d = 0$, o que é uma afirmação falsa

$\exists x_1 \varphi[a_1] = 1$ sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $(x_1 = x_2)\left[a_1\binom{x}{d}\right] = 1$

sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $d = 0$, o que é uma afirmação verdadeira

Logo, $\exists x_1 \varphi[a_1] = 1$

ii) $\varphi = \neg(x_1 = x_2)$

$\forall x_1 \varphi[a_1] = 1$ sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$, $\neg(x_1 = x_2)\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$, $x_1 = x_2\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 0$

sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$ $\left(x_1\left[a_1\binom{x_1}{d}\right], x_2\left[a_1\binom{x_1}{d}\right]\right) \notin \bar{=}$

sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$, $d \neq a_1(x_2)$

sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$, $d \neq 0$ o que é uma afirmação falsa

Portanto, $\forall x_1 \varphi[a_1] = 0$

e)
ii) cont

$\exists x_1\, \varphi[a_1] = 1$ sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $\neg(x_1 = x_2)\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $(x_1 = x_2)\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 0$

sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $d \neq a_1(x_2)$

sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $d \neq 0$ o que é verdade

Assim, $\exists x_1\, \varphi[a_1] = 1$

$(x_1 = x_2)\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 1$

$x_1\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = x_2\left[a_1\binom{x_1}{d}\right]$

$d = a_1(x_2)$

iii) $\varphi = s(x_1) < (x_1 + 0)$

$(\forall x_1\, \varphi)[a_1] = 1$ sse para todo d

sse para todo d ... $o)\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] \in \bar{<}$

sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$, $\bar{s}(d) < d + 0$

sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$, $d+1 < d$, o que é falso

Portanto, $\forall x_1\, \varphi[a_1] = 0$

$(\exists x_1\, \varphi)[a_1] = 1$ sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $\varphi\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $d+1 < d$ o que é falso

Logo $(\exists x_1\, \varphi)[a_1] = 0$

iv) $\varphi = (x_1 < x_2) \rightarrow (s(x_1) < s(x_2))$

$\forall x_1\, \varphi[a_1] = 1$ sse para todo o $d \in \mathbb{N}_0$, $\varphi\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$, se $(x_1 < x_2)\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 1$ então $s(x_1) < s(x_2)\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$, se $d < a_1(x_2)$ então $d+1 < a_1(x_2)+1$

sse para todo $d \in \mathbb{N}_0$, se $d < 0$ então $d+1 < 0+1$ o que é verdade

Assim $\forall x_1\, \varphi[a_1] = 1$

$\exists x_1\, \varphi[a_1] = 1$ sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $\varphi\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que se $d < 0$ então $d+1 < 0+1$, o que é verd

Portanto, $\exists x_1\, \varphi[a_1] = 1$

$\varphi \in F_L$ é válida numa L-e... para toda a ... a em E, $\varphi[a$...

d)

i) $\varphi = x_1 = x_2$

Vimos que $\varphi[a_2]_{EAut} = 0$. Logo, φ não é válida em EAut

ii) $\varphi = \neg(x_1 = x_2)$

Por b) sabemos que $\varphi[a_1]_{EAut} = 0$. Portanto, φ não é válida em EAut

iii) $\varphi = s(x_1) < x_1 + 0$

Vimos que $\varphi[a_1]_{EAut} = 0$. Logo, φ não é válida em EAut

iv)

Seja a uma atribuição em EAut

$\varphi = (x_1 < x_2) \rightarrow (s(x_1) < s(x_2))$

Temos $\varphi[a]_{EAut} = 1$ sse se $(x_1 < x_2)[a]_{EAut} = 1$, então $(s(x_1) < s(x_2))[a]_{EAut} = 1$

sse se $a(x_1) < a(x_2)$, então $\tilde{s}(a(x_1)) < \tilde{s}(a(x_2))$

sse se $a(x_1) < a(x_2)$, então $a(x_1)+1 < a(x_2)+1$ o que é verdade

Logo, $\varphi[a]_{EAut} = 1$

Como $\varphi[a]_{EAut} = 1$ para toda a atribuição a em EAut, φ é válida em EAut

e)

• As fórmulas de i), ii) e iii) não são válidas em EAut, e portanto, não são universalmente válidas. Resta verificar se $\varphi = (x_1 < x_2) \rightarrow (s(x_1) < s(x_2))$ é universalmente válida

• Consideremos a L-estrutura $E = (\mathbb{Z}, \sim)$ onde $\tilde{o}$ é o número zero

$\tilde{s}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é a função definida por $\tilde{s}(n) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\tilde{+}$ é a adição usual em $\mathbb{Z}$, $\tilde{\times}$ é a multiplicação usual em $\mathbb{Z}$, $\tilde{=}$ é a relação de igualdade usual em $\mathbb{Z}$ e $\tilde{<}$ é a relação "menor do que" em $\mathbb{Z}$

Seja $a: V \rightarrow \mathbb{Z}$ uma atribuição tal que $a(x_1) = -2$ e $a(x_2) = 1$

Temos que $(x_1 < x_2)[a]_E = 1$ uma vez que $(a(x_1), a(x_2)) \in \tilde{<}$ (pois $-2 < 1$)

$(s(x_1) < s(x_2))[a]_E = 0$, uma vez que $(s(x_1)[a]_E, s(x_2)[a]_E) \notin \tilde{<}$ (pois $(-2)^2 \not< 1^2$)

$\varphi[a]_E = 0$ e φ não é universalmente válida

5.2-

b)

i)

- $(x_1 = x_2)[a_1] = 1$ sse $(x_1[a_1], x_2[a_1]) \in \overline{=}$

sse $(a_1(x_1), a_1(x_2)) \in \overline{=}$

sse $(d_2, d_2) \in \overline{=}$ o que é verdade. Logo, $(x_1 = x_2)[a_1] = 1$

- $(x_1 = x_2)[a_2] = 1$ sse $(x_1[a_2], x_2[a_2]) \in \overline{=}$

sse $(a_2(x_1), a_2(x_2)) \in \overline{=}$

sse $(d_1, d_2) \in \overline{=}$ o que é falso. Assim $(x_1 = x_2)[a_2] = 0$

ii)

- $\neg(x_1 = x_2)[a_1] = 0$

$> [\neg \varphi][a] = 1 - \varphi[a]$

- $\neg(x_1 = x_2)[a_2] = 1$

iii)

- $(s(x_1) \leq (x_1 + 0))[a_1] = 1$ sse $(s(x_1)[a_1], (x_1+0)[a_1]) \in \overline{\leq}$

sse $\bar{s}(a_1(x_1)), \bar{+}(x_1(a_1), \bar{0}) \in \overline{<}$

sse $(\bar{s}(d_2), d_2) \in \overline{\leq}$

sse $(d_1, d_2) \in \overline{\leq}$, o que é falso. Logo $\varphi[a_1] = 0$

- $(s(x_1) \leq (x_1 + 0))[a_2] = 1$ sse $(s(x_1)[a_2], (x_1+0)[a_2]) \in \overline{\leq}$

sse $((\bar{s}(a_2(x_1)), \bar{+}(x_1[a_2], \bar{0})) \in \overline{\leq}$

sse $(\bar{s}(d_1), d_2) \in \overline{\leq}$

sse $(d_1, d_2) \in \overline{\leq}$ o que é verdadeiro. Logo, $\varphi[a_2] = 1$

iv)

- $(x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2))$

  - $(x_1 < x_2)[a_1] = 1$ sse $(a_1(x_1), a_1(x_2)) \in \overline{<}$

  sse $(d_2, d_2) \in \overline{\leq}$, o que é falso

Logo, $(x_1 < x_2)[a_1] = 0$, donde $\varphi[a] = 1$

- $(s(x_1) < s(x_2))[a_1] = 1$ sse $(\bar{s}(a_1(x_1)), \bar{s}(a_1(x_2))) \in \overline{\leq}$

sse $(d_1, d_2) \in \overline{\leq}$ o que é verdade

• $(x_1 < x_2)[a_2] = 1$ sse $(a_2(x_1), a_2(x_2)) \in \overline{<}$

sse $(d_1, d_2) \in \overline{<}$, o que é verdade

Assim, $(x_1 < x_2)[a_2] = 1$

• $s(x_1) < s(x_2)[a_2] = 1$ sse $(s(x_1)[a_2], s(x_2)[a_2]) \in \overline{<}$

sse $(\overline{s}(a_2(x_1)), \overline{s}(a_2(x_1))) \in \overline{<}$

sse $(\overline{s}(d_1), \overline{s}(d_2)) \in \overline{<}$

sse $(d_1, d_2) \in \overline{<}$, o que é verdade

Logo $(s(x_1) < s(x_2))[a_2] = 1$

• Dado que $(x_1 < x_2)[a_2] = 1$ e $(s(x_1) < s(x_2))[a_2] = 1$, podemos concluir que $\varphi[a_2] = 1$

e)

i) $\varphi = x_1 = x_2$

$\forall x_1 \varphi[a_1] = 1$ sse para todo $d \in D$, $(x_1 = x_2)[a_1\binom{x_1}{d}] = 1$

sse para todo $d \in D$, $(x_1[a_1\binom{x_1}{d}], x_2[a_1\binom{x_1}{d}]) \in \overline{=}$

sse para todo $d \in D$, $(d, a_1(x_2)) \in \overline{=}$

sse para todo $d \in D$ $(d, d_2) \in \{(d_1, d_1)(d_2, d_2)\}$ o que é falso pois,

Assim, $\forall x_1 \varphi[a_1] = 0$ para $d = d_1$, $(d, d_2) \notin \overline{=}$

$\exists x_1 \varphi[a_1] = 1$ sse existe $d \in D$. t.q $(x_1 = x_2)[a_1\binom{x_1}{d}] = 1$

sse existe $d \in D$ t.q $(x_1[a_1\binom{x_1}{d}], x_2[a_1\binom{x_1}{d}]) \in \overline{=}$

sse existe $d \in D$ t.q $(d, a_1(x_2)) \in \overline{=}$

sse existe $d \in D$ t.q. $(d, d_2) \in \{(d_1, d_1), (d_2, d_2)\}$, o que é verdade

(basta tomar $d = d_2$)

Logo $\exists x_1 \varphi[a_1] = 1$

iii) $\varphi = s(x_1) < (x_1 + 0)$

$\forall x_1 \varphi[a_1] = 1$ sse para todo $d \in D$ $(s(x_1) < (x_1 + 0))[a_1\binom{x_1}{d}] = 1$

sse para todo $d \in D$, $(s(x_1)[a_1\binom{x_1}{d}], (x_1 + 0)[a_1\binom{x_1}{d}]) \in \overline{<}$

sse para todo $d \in D$ $(d, d_2) \in \overline{<}$

Assim $\forall x_1 \varphi[a_1] = 0$ sse para todo $d \in D$, $(d, d_2) \in \{d_1, d_2\}$, o que é falso para $d = d_2$

e)

iii) cont.

$\exists x_1\ \varphi[a_1]=1$ sse existe $d \in D$ tq $(\neg(x_1) < (x_1+0))[a_1(^{x_1}_{d})]=1$

sse existe $d \in D$ tq $(\neg(x_1)[a_1(^{x_1}_{d})], (x_1+0)[a_1(^{x_1}_{d})]) \in \overline{<}$

sse existe $d \in D$ t.q $(d, d_2) \in \overline{<}$

sse existe $d \in D$ t.q $(d, d_2) \in \{d_1, d_2\}$ o que é verdade

Assim $\exists x_1\ \varphi[a_1]=1$ (basta considerar $d = d_1$)

iv) $\varphi = (x_1 < x_2) \to (\neg(x_1) < \neg(x_2))$

$\forall x_1\ \varphi[a_1]=1$ sse para todo o $d \in D$, $\varphi[a_1(^{x_1}_{d})]=1$

sse para todo o $d \in D$, se $(x_1 < x_2)[a_1(^{x_1}_{d})]=1$ então $\neg(x_1) < \neg(x_2)[a(^{x_1}_{d})]=1$

sse para todo o $d \in D$ se $d < a_1(x_2)$ então $d < a_1(x_2)$ $=1$

sse para todo o $d \in D$ se $d < d_2$ então $d < d_2$ o que é verdade

Assim $\forall x_1\ \varphi[a_1]=1$ (Como dão a mesma condição, têm o mesmo sinal logo é verdade

$\exists x_1\ \varphi[a_1]=1$ sse existe $d \in D$ tal que $\varphi[a_1(^{x_1}_{d})]=1$

sse existe $d \in D$ tal que $d < d$, então $d < d_2$ o que é verdade

d)

i) $\varphi = x_1 = x_2$

Vimos que $\varphi[a_2]_E = 0$ logo, φ não é válida em E

ii) Por b) sabemos que $\varphi[a_1]_E = 0$ Portanto φ n é válida em E

iii) $\varphi = \neg(x_1) < x_1 + 0$

Vimos que $\varphi[a_1] = E$. Logo, φ não é válida em E

iv) $\varphi = (x_1 < x_2) \to (\neg(x_1) < \neg(x_2))$

Seja a uma atribuição em E. Então, a é uma função de V em $D = \{d_1, d_2\}$

Temos

$\varphi[a]_E = 0$ sse $((x_1 < x_2)[a]_E = 1$ e $(\neg(x_1) < \neg(x_2))[a]_E = 0)$

Logo, $\varphi[a]_E = 1$

sse $(a(x_1), a(x_2)) \in \overline{<}$ e $(\bar{\neg}(a(x_1)), \bar{\neg}(a(x_2))) \notin \overline{<}$

Como $\varphi[a]_E = 1$ para toda a atribuição a em E, φ é válida em E

sse $(a(x_1), a(x_2)) \in \{(d_1, d_2)\}$ e $(a(x_1), a(x_2)) \notin \{(d_1, d_2)\}$, o que é

5.4-

e) $\models \exists x \forall y\, \varphi \to \forall y \exists x\, \varphi$

- Seja $E = (D, -)$, uma L-estrutura e $a : V \to D$ uma atribuição em E. Queremos mostrar que $(\exists x \forall y\, \varphi \to \forall y \exists x\, \varphi)[a]_E = 1$

$(\exists x \forall y\, \varphi \to \forall y \exists x\, \varphi)[a] = 1$ sse $\exists x \forall y\, \varphi[a] = 0$ ou $\forall y \exists x\, \varphi[a] = 1$

sse para todo $d_x \in D$ existe $d_y \in D$ tq $\varphi[a\binom{x}{d_x}\binom{y}{d_y}] = 0$

ou para todo $d \in D$ existe $d' \in D$ $\varphi[a\binom{y}{d}\binom{x}{d'}] = 1$ (*)

- Se for verdadeiro que:
  - para todo $d_x \in D$ existe $d_y \in D$ tal que $\varphi[a\binom{x}{d_x}\binom{y}{d_y}] \neq 1$ então a disjunção é verdadeira

- Se for falso que:
  - para todo $d_x \in D$ existe $d_y \in D$ tal que $\varphi[a\binom{x}{d_x}\binom{y}{d_y}] = 0$

então existe $d_x \in D$ tal que existe $d_y \in D$ tq $\varphi[a\binom{x}{d_x}\binom{y}{d_y}] \neq 0$

ou seja, existe $d_x \in D$ tal que existe $d_y \in D$ tq $\varphi[a\binom{x}{d_x}\binom{y}{d_y}] = 1$

então, para qualquer $d_y \in D$ existe $d_x \in D$ (definido anteriormente para d_y)

$\varphi[a\binom{x}{d_x}\binom{y}{d_y}] = 1$ (com x e y variáveis)

isto é, para qualquer $d_y \in D$ existe $d_x \in D$ $\varphi[a\binom{x}{d_x}\binom{y}{d_y}] = 1$

ou seja (* é uma afirmação verdadeira

Logo, em qualquer caso, a conjunção é verdadeira, consequentemente

$(\exists x \forall y\, \varphi \to \forall y \exists x\, \varphi)[a] = 1$

f) $\not\models \forall x \exists y\, \varphi \to \exists y \forall x\, \varphi$

- Seja $E = (D, -)$ uma L-estrutura e $a : V \to D$ uma atribuição em E tal que

$(\forall x \exists_y\, \varphi)[a] = 1$ e $(\exists_y \forall x)[a] = 0$

$\varphi = ((x + S(0)) = y)$

*Cont.

f) cont.

• $\forall x \exists y (x + s(0) = y)[a] = 1$ sse para todo $d_x \in \mathbb{N}_0$ existe $d_y \in \mathbb{N}_0$ tal que $d_x \bar{+} \bar{s}(\bar{0}) = d_y$

sse para todo $d_x \in \mathbb{N}_0$ existe $d_y = d_x + 1$ $\quad d_x + (0+1) = d_y$ é uma afirmação verdadeira

$\exists y \forall x (x + s(0) = y)[a] = 1$ sse existe $d_y \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $d_x \in \mathbb{N}_0$ $d_x \bar{+} \bar{s}(\bar{0}) = d_y$

sse existe um inteiro não negativo d_y tal que $d_y = d_x + 1$ para todo o d_x inteiro não negativo o que é falso. Logo $\exists y \forall x (x + s(0)) = y[a] = 0$

5.5

• Consideremos $Q = \forall$ e $\square = \vee$

• Queremos mostrar que, para qualquer L-estrutura $E = (D, -)$ e qualquer atribuição a em E

$$E \models \forall x (\varphi \vee \psi)[a] \text{ sse } E \models (\forall x\, \varphi \vee \psi)[a]$$

• Temos que

$E \models \forall x (\varphi \vee \psi)[a]$ sse para todo $d \in D$, $E \models (\varphi \vee \psi)\left[a\binom{x}{d}\right]$

sse para todo $d \in D$, $E \models \varphi\left[a\binom{x}{d}\right]$ ou $E \models \psi\left[a\binom{x}{d}\right]$

$x \notin LIV(\psi)$ logo a e $a\binom{x}{d}$ são atribuições tal que $a(y) = a\binom{x}{d}(y)$, para todo $y \in LIV(\psi)$ o que nos permite concluir que $\psi\left[a\binom{x}{d}\right] = \psi[a]$

sse para todo $d \in D$, $E \models \varphi\left[a\binom{x}{d}\right]$ ou $E \models \psi[a]$

sse $E \models \forall x\, \varphi[a]$ ou $E \models \psi[a]$

sse $E \models (\forall x\, \varphi \vee \psi)[a]$

• Podemos assim concluir que $\forall x (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\forall x\, \varphi \vee \psi)$

Consideremos agora, $Q = \exists$ e $\square = \vee$

• Queremos mostrar que, para qualquer L-estrutura $E = (D, -)$ e qualquer atribuição a em E

$$E \models \exists x (\varphi \vee \psi)[a] \text{ sse } E \models (\exists x\, \varphi \vee \psi)[a]$$

• Temos que: $E \models \exists x (\varphi \vee \psi)[a]$ sse existe $d \in D$ t.q. $E \models (\varphi \vee \psi)\left[a\binom{x}{d}\right]$

sse existe $d \in D$ t.q. $E \models \varphi\left[a\binom{x}{d}\right]$ ou $E \models \psi[a]$

sse existe $d \in D$ t.q. $E \models \varphi\left[a\binom{x}{d}\right]$ ou $E \models \psi[a]$

sse $E \models \exists x\, \varphi[a]$ ou $E \models \psi[a]$

sse $E \models (\exists x\, \varphi \vee \psi)[a]$

Assim, $\exists x (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\exists x\, \varphi \vee \psi)$

5.6-

a)

i) $\models \exists x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\forall x \varphi \to \psi)$ se $\exists x(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\forall x \varphi \to \psi)$

• Temos que

$\forall x \varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg \forall x \varphi \vee \psi$

$\Leftrightarrow \exists x \neg \varphi \vee \psi$

$\Leftrightarrow \exists x (\neg \varphi \vee \psi)$

$\Leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$

se $x \notin LIV(\psi)$

$Qx(\varphi \square \psi) \Leftrightarrow Qx \varphi \square \psi$
para $Q \in \{\forall, \exists\}$ e $\square \in \{\wedge, \vee\}$

ii) $\models \forall x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\exists x \varphi \to \psi)$ se $\forall x(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\exists x \varphi \to \psi)$

• Temos que: $\forall x(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \forall x(\neg \varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\forall x \neg \varphi) \vee \psi$

$\Leftrightarrow (\neg \exists x \varphi) \vee \psi \Leftrightarrow \exists x \varphi \to \psi$

se $x \notin LIV(\psi)$ $Qx(\varphi \square \psi) \Leftrightarrow Qx \varphi \square \psi$ para
$Q \in \{\forall, \exists\}$ e $\square \in \{\wedge, \vee\}$

5.6-
b)

- Vejamos que a condição $x \notin LIV(\psi)$ é necessária para $\models (\forall x\, \varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x (\varphi \to \psi)$

- Para tal, precisamos de determinar um tipo de linguagem L, uma L-estrutura E e L-fórmulas φ e ψ tais que $E \not\models ((\forall x\, \varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x (\varphi \to \psi))[a]$, para alguma atribuição a em E

- Consideremos $L = (\{\}, \{R, P\}, N)$, onde $N(P) = N(R) = 1$, $E = (\{1,2\}, -)$ onde $\overline{R} = \{1,2\}$ e $\overline{P} = \{2\}$, $\varphi = R(x_0)$ e $\psi = P(x_0)$

Note-se que $x_0 \in LIV(\psi)$

- Seja a a atribuição em E tq $a(x_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$

$E \models \forall x\, \varphi[a]$ sse para todo $d \in \{1,2\}$, $R(x_0)[a\binom{x_0}{d}] = 1$

sse para todo o $d \in \{1,2\}$, $d \in \overline{R}$, o que é verdade

Logo, $E \models \forall x_0\, \varphi[a]$

No entanto, $E \not\models \psi[a]$. De facto,

$E \models \psi[a]$ sse $P(x_0)[a] = 1$

sse $a(x_0) \in \overline{P}$

sse $1 \in \overline{P}$ o que é falso

Logo $E \not\models \psi[a]$

Como $E \models \forall x_0\, \varphi[a]$ e $E \not\models \psi[a]$ segue-se que

$E \not\models \forall x_0\, \varphi \to \psi[a]$.

- Mostremos que $E \models \exists x_0 (\varphi \to \psi)[a]$

[↓] sse existe $d \in \{1,2\}$ tq $(\varphi \to \psi)[a\binom{x_0}{d}] = 1$

sse existe $d \in \{1,2\}$ tq se $\varphi[a\binom{x_0}{d}] = 1$, então $\psi[a\binom{x_0}{d}] = 1$

sse existe $d \in \{1,2\}$ tq se $d \in \overline{R}$, então $d \in \overline{P}$ o que é verdade (basta tomar $d = 2$)

Assim $E \not\models (\forall x_0\, \varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x (\varphi \to \psi)$

c)

$\exists x (\varphi \to \forall x\, \varphi) \Leftarrow\Rightarrow \forall x\, \varphi \to \forall x\, \varphi$
(a) tomando $\psi = \forall x\, \varphi$

Como $\models \forall x\, \varphi \to \forall x\, \varphi$, podemos concluir que $\models \exists x (\varphi \to \forall x\, \varphi)$

5.7 -

a) $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ é inconsistente pois $\varphi_2 = \neg\varphi_1$. Se (E, a) fosse uma realização de $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ teríamos $\varphi_1[a]_E = 1 = \varphi_2[a]_E$, i.e., $\varphi_1[a]_E = \neg\varphi_1[a]_E$ o que é impossível.

e)

$\varphi_1 = x_1 < x_0$

$\varphi_4 = \forall x_1 \neg(x_1 < x_0)$

- Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em E

$E \models \varphi_1[a]$ sse $(a(x_1), a(x_0)) \in \overline{<}$ *

e

$E \models \varphi_4[a]$ sse para todo $d \in dom(E)$, $\neg(x_1 < x_0)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse para todo $d \in dom(E)$, $x_1 < x_0\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 0$

sse para todo $d \in dom(E)$, $(d, a(x_0)) \notin \overline{<}$ **

- Observe-se que * e ** não podem ser ambos verdadeiros

De facto, se * é verdadeiro, temos que $d = a(x_1)$ é tal que $(d, a(x_0)) \in \overline{<}$ e $d \in dom(E)$ logo ** será falso

Assim, não existe nenhuma realização de $\{\varphi_1, \varphi_4\}$ e este conjunto é inconsistente