• $\vDash \exists x \forall y\, \varphi \to \forall y\, \exists x\, \varphi$

Seja $E=(D,^-)$ uma L-estrutura e $a: V \to D$ uma atribuição
$\exists x \forall y\, \varphi \to \forall y\, \exists x\, \varphi = 1$ sse $\exists x \forall y\, \varphi[a]=0$ ou $\forall y \exists x\, \varphi[a]=1$
sse qualquer que seja $d_1 \in D$ $\forall y\, \varphi[a(\frac{x}{d_1})]=0$
ou// qualquer que seja $d_2 \in D$ $\exists x\, \varphi[a(\frac{y}{d_2})]=1$
sse qualquer que seja $d_1 \in D$ existe $d_3 \in D$ $\varphi[a(\frac{x}{d_1})(\frac{y}{d_3})]=0$
ou// qualquer que seja $d_2 \in D$ existe $d_4 \in D$ $\varphi[a(\frac{y}{d_2})(\frac{x}{d_4})]=1$

• Se qualquer que seja $d_1 \in D$ existe $d_3 \in D$ tal que $\varphi[a(\frac{x}{d_1})(\frac{y}{d_3})]=0$, então a disjunção é verdadeira e $(\exists x \forall y\, \varphi \to \forall y\, \exists x\, \varphi)[a]=1$

• Se não, existe $d_1 \in D$ tal que qualquer escolha de $d \in D$ $\varphi[a(\frac{x}{d_1})(\frac{y}{d_3})]=1$(**) Fazendo $d_4=d_1$, então qualquer $d_2 \in D$ $\varphi[a(\frac{y}{d_2})(\frac{x}{d_1})] \overset{*}{=} \varphi[a(\frac{x}{d_1})(\frac{y}{d_2})] \overset{**}{=} 1$
Também neste caso a disjunção é verdadeira e a conclusão final é que $\vDash \exists x \forall y\, \varphi \to \forall y\, \exists x\, \varphi$

* porque x e y são variáveis e x não ocorre livre em $\forall y$ nem y ocorre livre em $\exists x$

• $\forall x(\psi \to \varphi), \exists x(\theta \wedge \psi) \vDash \exists x(\theta \wedge \varphi)$

Seja $E=(D,^-)$ uma L-estrutura e seja $a: V \to D$ uma substituição. Por hipótese suponhamos que $\forall x(\psi \to \varphi)[a]=1$ e $\exists x(\theta \wedge \psi)[a]=1$

• Então (i) para todo o $d \in D$ $\psi \to \varphi[a(\frac{x}{d})]=1$, ou seja, $\psi[a(\frac{x}{d})]=0$ ou $\varphi[a(\frac{x}{d})]=1$
(ii) existe $d_1 \in D$ tal que $\theta[a(\frac{x}{d_1})]=1$ e $\psi[a(\frac{x}{d_1})]=1$

• Queremos provar que $\exists x(\theta \wedge \varphi)[a]=1$, ou seja, queremos provar que existe $d_2 \in D$ tal que $\theta[a(\frac{x}{d_2})]=\varphi[a(\frac{x}{d_2})]=1$
Fazendo $d_2=d_1$ temos que $\theta[a(\frac{x}{d_2})]=1$ e $\psi[a(\frac{x}{d_2})]=1$ por (ii). Como $\psi[a(\frac{x}{d_2})] \neq 0$ por i então $\varphi[a(\frac{x}{d_2})]=1$

• (tipos de linguagem $L=L_{Arit}$) a estrutura $E_{Arit}=(\mathbb{N}_0,^-)$ e sejam a_1 e a_2 atribuições em E_{Arit} tais que $a_1(x_i)=0$ e $a_2(x_i)=i$
- determine $t[a_1]$ e $t[a_2]$
$(S(0)+x_5) \times S(x_1+x_2)[a_1]=$
$=(S(0)+x_5)[a_1] \times (S(x_1+x_2))[a_1]=$
$=(\bar{S}(0)[a_1]+x_5[a_1]) \times \bar{S}(x_1[a_1]+x_2[a_1])=$
$=(\bar{S}(a_1(0))+a_1(x_5)) \times \bar{S}(a_1(x_1)+a_1(x_2))$
$=(\bar{S}(0)+0) \times \bar{S}(0+0)=$
$=\bar{S}(0) \times \bar{S}(0)=(0+1) \times (0+1)=1$

$(S(0)+x_5) \times S(x_1+x_2))[a_2]=$
$=(S(0)+x_5)[a_2] \times S(x_1+x_2)[a_2]$
$=\bar{S}(0)[a_2]+x_5[a_2] \times \bar{S}(x_1[a_2]+x_2[a_2])$
$=(1+5) \times \bar{S}(1+2)=6 \times 4=24$

• $\vDash \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi)$ é universalmente válida se para qualquer L-estrutura $E=(D,^-)$ e qualquer atribuição a $\exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi)[a]=1$

$(\exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi))[a]=1$ sse $\exists x(\varphi \wedge \psi)[a]=0$
ou// $(\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi)[a]=1$ sse para todo o $d \in D$ $(\varphi \wedge \psi)[a(\frac{x}{d})]=0$
ou// $\exists x\, \varphi[a]=1$ e $\exists x\, \psi[a]=1$ sse para todo o $d \in D$ $\varphi[a(\frac{x}{d})]=0$ ou $\psi[a(\frac{x}{d})]=0$, ou existe $d_1 \in D$ tal que $\varphi[a(\frac{x}{d_1})]=1$ e existe $d_2 \in D$ tal que $\psi[a(\frac{x}{d_2})]=1$

• Se para todo o $d \in D$ $\varphi[a(\frac{x}{d})]=0$ ou $\psi[a(\frac{x}{d})]=0$, então a afirmação é verdadeira. Caso contrário, existe $d \in D$ tal que $\varphi[a(\frac{x}{d})]=\psi[a(\frac{x}{d})]=1$. Logo, fazendo $d_1=d_2=d$, a afirmação é verdadeira

• $\forall x \neg(\varphi \wedge \psi), \exists x(\theta \wedge \varphi) \vDash \exists x \neg(\theta \to \psi)$

$\exists x \neg(\theta \to \psi)$ é consequência semântica de $\{\forall x \neg(\varphi \wedge \psi), \exists x(\theta \wedge \varphi)\}$ se para qualquer L-estrutura $E(D,^-)$ e atribuição a se $\forall x \neg(\varphi \wedge \psi)[a]=1$(1) e $\exists x(\theta \wedge \varphi)[a]=1$(2), então $\exists x \neg(\theta \to \psi)[a]=1$
Seja (E,a) tal que a hipótese (1) e (2) se verifica. Então para todo o $d \in D$ $(\varphi \wedge \psi)[a(\frac{x}{d})]=0$ e existe $d' \in D$ tal que $\theta[a(\frac{x}{d'})]=1$ e $\varphi[a(\frac{x}{d'})]=1$
Como $\varphi[a(\frac{x}{d'})]=1$, então $\psi[a(\frac{x}{d'})]=0$.
Assim, $(\theta \to \psi)[a(\frac{x}{d'})]=0$. Consequentemente existe $d' \in D$ tal que $\neg(\theta \to \psi)[a(\frac{x}{d'})]=1$
Logo, $\exists x \neg(\theta \to \psi)[a]=1$

• Calcule $\varphi[a_1]$ e $\varphi[a_2]$

• $(x_1 < x_2) \to (S(x_1) < S(x_2))$

$\varphi[a_1]=1$ sse se $(x_1<x_2)[a_1]=1$, então $(S(x_1)<S(x_2))[a_1]=1$
sse se $a_1(x_1)<a_1(x_2)$, então $\bar{S}(a_1(x_1)) < \bar{S}(a_1(x_2))$
sse se $\underbrace{0<0 \text{ então } 1<1}$
afirmação verdadeira ($0<0$ é falso e $1<1$ também ($0 \to 0$ é verdade))
Assim, $\varphi[a_1]=1$

$\varphi[a_2]=1$ sse se $(x_1<x_2)[a_2]=1$, então $(S(x_1)<S(x_2))[a_2]=1$ sse se $a_2(x_1)<a_2(x_2)$, então $\bar{S}(a_2(x_1)) < \bar{S}(a_2(x_2))$ sse se $\underbrace{1<2 \text{ então } 2<3}$,
afirmação verdadeira ($1<2$ é verdade e $2<3$ tmb)

Portanto, $\varphi[a_2]=1$

• $\nvDash \forall x \exists y\, \varphi \to \exists y \forall x\, \varphi$

Seja $E=(D,^-)$ uma L-estrutura e $a: V \to D$ uma atribuição
$(\forall x \exists y\, \varphi)[a]=1$ e $(\exists y \forall x\, \varphi)[a]=0$ $\varphi=((x+S(0))=y)$ por ex.

$\forall x \exists y(x+S(0)=y)[a]=1$ sse para todo $d_x \in \mathbb{N}_0$ existe $d_y \in \mathbb{N}_0$ tal que $d_x \bar{+} \bar{S}(\bar{0})=d_y$ sse para todo o $d_x \in \mathbb{N}_0$ existe $d_y=d_x+1$ $d_x+(0+1)=d_y$ é uma afirmação verdadeira.
$\exists y \forall x(x+S(0)=y)[a]=1$ sse existe $d_y \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo o $d_x \in \mathbb{N}_0$ $d_x+\bar{S}(\bar{0})=d_y$ sse existe um inteiro não negativo d_y tal que $d_y=d_x+1$ para todo d_x inteiro não negativo o que é falso.
Logo $\exists y \forall x(x+S(0)=y)[a]=0$

• determine $(\forall x_1\, \varphi)[a_1]$ e $(\exists x_1\, \varphi)[a_1]$
$\varphi=(x_1<x_2) \to (S(x_1)<S(x_2))$

$\forall x_1\, \varphi[a_1]=1$ sse para todo o $d \in \mathbb{N}_0$, $\varphi[a_1(\frac{x_1}{d})]=1$
sse para todo o $d \in \mathbb{N}_0$, se $(x_1<x_2)[a_1(\frac{x_1}{d})]=1$ então $(S(x_1)<S(x_2))[a_1(\frac{x_1}{d})]=1$
Assim, $\forall x_1\, \varphi[a_1]=1$ sse para todo o $d \in \mathbb{N}_0$ se $d<a_1(x_2)$ então $d+1<a_1(x_2)+1$
sse para todo o $d \in \mathbb{N}_0$, se $d<0$ então $d+1<0+1$ o que é verdade

• $\exists x_1\, \varphi[a_1]=1$ sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $\varphi[a_1(\frac{x_1}{d})]=1$
sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que se $d<0$ então $d+1<0+1$ o que é verdade
Portanto $\exists x_1\, \varphi[a_1]=1$!!

• Indique se a fórmula é válida na estrutura E_{Arit}
Seja a uma atribuição em E_{Arit}
$\varphi=(x_1<x_2) \to (S(x_1)<S(x_2))$
Temos $\varphi[a]_{E_{Arit}}=1$ sse se $(x_1<x_2)[a]_{E_{Arit}}=1$, então $(S(x_1)<S(x_2))[a]_{E_{Arit}}=1$
sse se $a(x_1)<a(x_2)$, então $\bar{S}(a(x_1)) < \bar{S}(a(x_2))$
sse se $a(x_1)<a(x_2)$, então $a(x_1)+1<a(x_2)+1$ o que é verdade
Logo, $\varphi[a]_{E_{Arit}}=1$. Como $\varphi[a]_{E_{Arit}}=1$ para toda a distribuição a em E_{Arit} φ é válida em E_{Arit}

• Indica se é universalmente válida
Verifiquemos que $\varphi=(x_1<x_2) \to (S(x_1)<S(x_2))$ é universalmente válida

Consideremos a L-estrutura $E=(\mathbb{Z},^\sim)$ onde $\tilde{0}$ é o nº zero, $\tilde{S}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é a função definida por $\tilde{S}(m)=m^2$ para todo o $m \in \mathbb{Z}$, $\tilde{+}$ é a adição usual em $\mathbb{Z}$, $\tilde{\times}$ é a multiplicação usual em $\mathbb{Z}$, $\tilde{=}$ é a relação de igualdade usual em $\mathbb{Z}$ e $\tilde{<}$ é a relação usual "menor do que" em $\mathbb{Z}$. Seja $a: V \to \mathbb{Z}$ uma atribuição tal que $a(x_1)=-2$ e $a(x_2)=1$. Temos que:
$(x_1<x_2)[a]_E=1$ uma vez que $(a(x_1), a(x_2)) \in \tilde{<}$ (pois $(-2<1)$; $(S(x_1)<S(x_2))[a]_E=0$ uma vez que $(S(x_1)[a], S(x_2)[a]) \notin \tilde{<}$ pois $((-2)^2 \nless 1^2)$
$\therefore \varphi[a]_E=0$ e φ não é universalmente válida.

$L = (\{0, f, g\}, \{R\}, \mathcal{N})$ $\mathcal{N}(0)=0$ $\mathcal{N}(f)=1$ $\mathcal{N}(g)=2$ $\mathcal{N}(R)=2$

X

- O conjunto dos termos do tipo L é definido indutivamente por: → para cada variável $x_i \in V$ $x_i \in T_L$
  → $0 \in T_L$; → para qualquer $t_1 \in T_L$ $f(t_1) \in T_L$
  → para qualquer $t_1, t_2 \in T_L$ $g(t_1, t_2) \in T_L$

- $R(x_0, x_1) \notin T_L$ porque R é um símbolo de predicado e não um símbolo de função

→ Explicite a definição por recursão estrutural em termos do tipo L da função VAR (que a cada termo faz corresponder as variáveis que nele ocorrem).

$VAR: T_L \to \mathcal{P}(V)$

X

$x_i \to \{x_i\}$

$0 \to \{\}$

$f(t_1) \to VAR(t_1)$ com $t_1 \in T_L$

$g(t_1, t_2) \to Var(t_1) \cup Var(t_2)$ com $t_1, t_2 \in T_L$

→ Sejam t_1, t_2 termos do tipo L tais que $x_1 \notin Var(t_2)$ e $x_2 \notin Var(t_1)$. Mostre que $(t[t_1/x_1])[t_2/x_2] = (t[t_2/x_2])[t_1/x_1]$

R:

- Por hipótese, $t_1, t_2 \in T_L$ tais que $x_1 \notin Var(t_2)$ e $x_2 \notin Var(t_1)$. Vamos usar o princípio da indução estrutural para T_L

1) $t = x_i \in V$

- Se $i \neq 1$ e $i \neq 2$ então $x_i[t_1/x_1][t_2/x_2] = x_i$
  $x_i[t_2/x_2][t_1/x_1] = x_i$
- Se $i = 1$ então $x_1[t_1/x_1][t_2/x_2] = t_1$
  $x_1[t_2/x_2][t_1/x_1] = t_1$
- Se $i = 2$ então $x_2[t_1/x_1][t_2/x_2] = x_2[t_2/x_2] = t_2$
  $x_2[t_2/x_2][t_1/x_1] = t_2[t_1/x_1] = t_2$

2) Se $t = 0$ então $0[t_1/x_1][t_2/x_2] = 0[t_2/x_2][t_1/x_1]$

3i) Se $t = f$ com $t' \in T_L$

- Por h.i. suponhamos que $t'[t_1/x_1][t_2/x_2] = t'[t_2/x_2][t_1/x_1]$

$f(t')[t_1/x_1][t_2/x_2] = f(t'[t_1/x_1])[t_2/x_2]$
$= f(t'[t_1/x_1][t_2/x_2])$
por h.i. $= f(t'[t_2/x_2][t_1/x_1])$
$= f(t'[t_2/x_2])[t_1/x_1]$
$= f(t')[t_2/x_2][t_1/x_1]$

3ii) Se $t = g(t', t'')$ e $t', t'' \in T_L$

- Por h.i. suponhamos que: $t'[t_1/x_1][t_2/x_2] = t'[t_2/x_2][t_1/x_1]$ e $t''[t_1/x_1][t_2/x_2] = t''[t_2/x_2][t_1/x_1]$

$g(t', t'')[t_1/x_1][t_2/x_2] =$
$= g(t'[t_1/x_1][t_2/x_2], t''[t_1/x_1][t_2/x_2])$
por h.i. $= g(t'[t_2/x_2][t_1/x_1], t''[t_2/x_2][t_1/x_1])$
$= g(t', t'')[t_2/x_2][t_1/x_1]$ o que conclui a prova

$L = (\{0, -\}, \{P, <\}, \mathcal{N})$ $\mathcal{N}(0)=0$, $\mathcal{N}(P)=1$, $\mathcal{N}(-)=\mathcal{N}(<)=2$

← usado para definir os termos

→ usado para definir as fórmulas

Ex: termos do tipo L: x_1; x_{13}; 0, $x_1 - x_{13}$

Ex: fórmulas atómicas: $P(x_1)$, $x_1 < 0 \in At_L$, $P(x_1 - x_2) \in At_L$, $(x_2 - x_3) - 0 < x_2 - x_1 \in At_L$

- Justifique que é uma fórmula do tipo L:

$\varphi: \forall x_1 \exists x_0 \underbrace{(x_1 < x_0)}_{\in At_L} \wedge \underbrace{P(x_1)}_{\in At_L}$

Sequência de formação: $x_1 < x_0$, $P(x_1)$, $\exists x_0 (x_1 < x_0)$, $\forall x_1 \exists x_0 (x_1 < x_0)$, $\forall x_1 \exists x_0 (x_1 < x_0) \wedge P(x_1)$

$subf(\varphi) = \{x_1 < x_0; P(x_1); \exists x_0 (x_1 < x_0), \forall x_1 \exists x_0 (x_1 < x_0), \varphi\}$

$\psi: \forall x_0 \overbrace{(x_0 < x_1)}^{\in At_L} \vee \exists x_1 \overbrace{(x_1 < x_0)}^{\in At_L}$

S. formação: $\{x_0 < x_1, x_1 < x_0, \forall x_0 (x_0 < x_1), \exists x_1 (x_1 < x_0), \psi\}$

$subf(\psi) = \{x_0 < x_1, x_1 < x_0, \forall x_0 (x_0 < x_1), \exists x_1 (x_1 < x_0), \psi\}$

- φ $\forall x_1 \exists x_0 (x_1 < x_0) \wedge P(x_1)$

$LIG(\varphi) = \{x_1, x_0\}$ $LIV(\varphi) = \{x_1\}$

- $\psi = \forall x_0 (x_0 < x_1), \vee \exists x_1 (x_1 < x_0)$,

$LIG = \{x_0, x_1\}$ $LIV = \{x_1, x_0\}$

- $\varphi[x_2 - x_0/x_1] = \forall x_1 \exists x_0 (x_1 < x_0) \wedge P(x_2 - x_0)$
- $\psi[x_2 - x_0/x_1] = \forall x_0 (x_0 < x_2 - x_0) \vee \exists x_1 (x_1 < x_0)$

- A variável x_1 está livre para o termo x_2 na fórmula $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 < x_2)$
- $x_1 \notin LIV$ logo, x_1 está livre para qualquer L-termo em φ $(\forall x_1 \exists x_2 (x_1 < x_2))[x_2/x_1] = \forall x_1 \exists x_2 (x_1 < x_2)$
- A variável x_1 está livre para qualquer termo do tipo L na fórmula $\exists x_2 (x_1 < x_2)$

→ ocorrência livre no alcance de $\exists x_2$

- Se T_L é tal que $x_2 \in Var(t)$ x_1 não está livre.

Logo a afirmação é falsa.

⚠ Se $x_2 \in t$ então há captura de variáveis o que não pode ocorrer nestes exercícios!!!

- A variável x_2 está livre para o termo x_1 em $\exists x_2 (x_1 < x_2) \vee \exists x_1 (x_1 < x_2)$

↳ ocorrência livre mas, $x_1 \in Var(x_1)$ logo haveria captura de variáveis

A afirmação é falsa

- Mostre que para todo $\varphi, \psi \in F_L$ tais que $x \notin LIV(\psi)$ se tem: → $\models \forall x (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\exists x\, \varphi \to \psi)$ sse ... → $\models \exists x (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\forall x\, \varphi \to \psi)$ sse $\exists x (\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\forall x\, \varphi \to \psi)$; $\forall x (\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \exists x\, \varphi \to \psi$

Temos que: $\forall x\, \varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg \forall x\, \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \exists x \neg \varphi \vee \psi$ $\Leftrightarrow \exists x (\neg \varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists x\, \varphi \to \psi$

$x \notin LIV(\psi)$

Temos que: $\forall x (\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \forall x (\neg \varphi \vee \psi)$ $\Leftrightarrow (\forall x \neg \varphi) \vee \psi \Leftrightarrow (\neg \exists x\, \varphi) \vee \psi$ $\Leftrightarrow \exists x\, \varphi \to \psi$

$Qx(\varphi \square \psi) \Leftrightarrow Qx\, \varphi \square \psi$ para $Q \in \{\forall, \exists\}$ e $\square \in \{\vee, \wedge\}$

- Mostre que a condição $x \notin LIV$ é necessária
- Vejamos que a condição $x \notin LIV(\psi)$ é necessária para $\models (\forall x\, \varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x (\varphi \to \psi)$
- Para tal, precisamos de determinar um tipo de linguagem L, uma L-estrut. e L-form. φ e ψ tais que $E \not\models (\forall x\, \varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x (\varphi \to \psi)[a]$ para alguma atribuição a
- Consideremos $L = (\{\}, \{R, P\}, \mathcal{N})$ onde $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(R) = 1$, $E(\{1, 2\}, -)$ onde $\bar{R} = \{1, 2\}$, $\bar{P} = \{2\}$, $\varphi = R(x_0)$ e $\psi = P(x_0)$

Note-se que $x_0 \in LIV(\psi)$; • Seja a atribuição em E tq $a(x_i) = 1$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$ $E \models \forall x\, \varphi[a]$ sse para todo $d \in \{1, 2\}$, $R(x_0)[a\binom{x_0}{d}] = 1$ sse para todo o $d \in \{1, 2\}$, $d \in \bar{R}$ o que é verdade logo $E \models \forall x_0\, \varphi[a]$

- No entanto, $E \not\models \psi[a]$. De facto, $E \models \psi[a]$ sse $P(x_0)[a] = 1$ sse $a(x_0) \in \bar{P}$ sse $1 \in \bar{P}$ o que é falso logo $E \not\models \psi[a]$
- Como $E \models \forall x_0\, \varphi[a]$ e $E \not\models \psi[a]$ segue-se que $E \not\models \forall x_0\, \varphi \to \psi[a]$; Mostremos que $E \models \exists x_0 (\varphi \to \psi)[a]$ sse existe $d \in \{1, 2\}$ tq $(\varphi \to \psi)[a\binom{x_0}{d}] = 1$ sse existe $d \in \{1, 2\}$ tq se $\varphi[a\binom{x_0}{d}] = 1$, então $\psi[a\binom{x_0}{d}] = 1$ sse existe $d \in \{1, 2\}$ tq se $d \in \bar{R}$ então $d \in \bar{P}$ o que é verdade $(d = 2)$; Assim, $E \models (\forall x_0\, \varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x (\varphi \to \psi)$

- $\varphi_1 = (x_1 < x_0)$, $\varphi_2 = \neg(x_1 < x_0)$, $\varphi_4 = \forall x_1 \neg(x_1 < x_0)$ • $\{\varphi_1, \varphi_4\}$ Sejam E uma L-estr. e a uma atribuição em E; $E \models \varphi_1[a]$ sse $(a(x_1), a(x_0)) \in \bar{<}$ * e // $E \models \varphi_4[a]$ sse para todo $d \in dom(E)$ $\neg(x_1 < x_0)[a\binom{x_1}{d}] = 1$ sse para todo o $d \in dom(E)$, $x_1 < x_0[a\binom{x_1}{d}] = 0$ sse para todo $d \in dom(E)$, $(d, a(x_0)) \notin \bar{<}$ **; Observe-se que * e ** não podem ser ambos verdadeiros. De facto, se * é verdadeira, temos que $d = a(x_1)$ é tal que $(d, a(x_0)) \in \bar{<}$ e $d \in dom(E)$ logo ** será falsa. Assim, não existe nenhuma realização de $\{\varphi_1, \varphi_4\}$ e este conjunto é inconsistente

$\{\varphi_1, \varphi_2\}$ é inconsistente pois $\varphi_2 = \neg \varphi_1$. Se (E, a) fosse uma realização de $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ teremos $\varphi_1[a] = 1 = \varphi_2[a]$ i.e. $\varphi_1[a] = \neg \varphi_1[a]$ o que é imp.

$\Delta \cup \{\exists x_0 (x_1 < s(x_0))\}$ e $\Delta \cup \{\forall x_0 (\neg(x_1 < s(x_0)))\}$ são inconsistentes?

- Suponhamos que Δ é consistente e seja (E, a) uma realização. Então $\exists x_0 (x_1 < s(x_0))[a] = 0$ e $\forall x_0 (\neg(x_1 < s(x_0)))[a] = 0$; Como $\exists x_0 (x_1 < s(x_0)) \Leftrightarrow \neg(\forall x_0 (\neg(x_1 < s(x_0))))$ então $\exists x_0 (x_1 < s(x_0))[a] \neq \forall x_0 (\neg(x_1 < s(x_0)))[a]$, logo, é imp. Δ inconsistente, ou seja, (E, a) não é uma realização de Δ

Considere o conjunto de L-for. $\Gamma = \{\exists x_0 (x_1 = s(x_1) + x_0), 0 < s(x_0)\}$. Indique uma realização (E', a') de Γ X

$E' = (\mathbb{Z}, -)$ em que $\bar{0} = 0$

$\bar{S}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\bar{+}: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$

$m \to m + 1$ $(a, b) \to a + b$

< é a relação usual e = também

$a': V \to \mathbb{Z}$

$x_i \to i$ $\forall i \in \mathbb{N}_0$

Como o x_0 está ligado, então para d então é verdade para $d = -1$

- $E = (\mathbb{N}_0, -)$ a L-estr. em que $\bar{z} = 0$, $\bar{s}$ é o sucessor e $\bar{soma} = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}_0^3 : i + j = k\}$

Verifique que $T = \{\forall x_0 \forall x_1 (soma(x_0, z, x_1) \to soma(s(x_0), z, s(x_1))), \exists x_2\, soma(z, x_2, s(z))\}$

- E é um modelo de T se para qualquer atribuição $a: V \to \mathbb{N}_0$
  i) $E \models \forall x_0 \forall x_1 (soma(x_0, z, x_1) \to soma(s(x_0), z, s(x_1)))[a]$ e
  ii) $E \models \exists x_2\, soma(z, x_2, s(z))[a]$

- i) $\forall x_0 \forall x_1 (soma(x_0, z, x_1) \to soma(s(x_0), z, s(x_1)))[a] = 1$ sse para quaisquer $d_0, d_1 \in \mathbb{N}_0$ $(soma(x_0, z, x_1) \to soma(s(x_0), z, s(x_1)))[a\binom{x_0}{d_0}\binom{x_1}{d_1}] = 1$ sse para quaisquer $d_0, d_1 \in \mathbb{N}_0$ $soma(x_0, z, x_1)[a\binom{x_0}{d_0}\binom{x_1}{d_1}] = 0$ ou $soma(s(x_0), z, s(x_1))[a\binom{x_0}{d_0}\binom{x_1}{d_1}] = 1$ sse para qualquer $d_0, d_1 \in \mathbb{N}_0$ $(d_0, z, d_1) \notin \bar{soma}$ ou $(s(d_0), z, s(d_1)) \in \bar{soma}$ sse para qq. $d_0, d_1 \in \mathbb{N}_0$ $d_0 \neq d_1$ ou $d_0 + 1 = d_1 + 1$ (1)

ii) $\exists x_2\, soma(z, x_2, s(z))[a] = 1$ sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $soma(z, x_2, s(z))[a\binom{x_2}{d}] = 1$ sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $\bar{z} + d = \bar{s}(\bar{z})$ sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $d = 1$ (2); Porque (1) e (2) são afirmações verdadeiras conclui-se que E é um modelo de T.