$p_0, p_1, \dots$ → variáveis proposicionais

$\vee, \wedge, \rightarrow, \dots$ – conectivo proposicional

$\neg p_2 \rightarrow (p_1 \vee p_3), \neg p_2 \models \neg p_1$

tem obrigatoriamente de ser $= 1$

$v(\perp) = 0$

$v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$

$v(\varphi \vee \psi) = \max\{v(\varphi), v(\psi)\}$

$v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\}$

$v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$

$v(\varphi \leftrightarrow) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$

$\neg p_2 \wedge (p_1 \vee \perp)[\psi/p_1] = \neg p_2 \wedge (\psi \vee \perp)$

• uma formula φ diz-se um teorema se existir uma derivação D de φ cujo conjunto de hipoteses não cancelados é vazio

Γ é semanticamente consistente se existir uma valoração v tal que $v \models \Gamma$ (há pelo menos uma em que são todos verdadeiros)

• Γ é semanticamente inconsistente se todas as valorações de forem falsas $v \not\models \Gamma$

$(\varphi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

$(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$(\neg\varphi) \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \perp$

$(\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

$(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

$\perp \Leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$

• Teorema: para cada $\varphi \in F^{CP}$ existe φ^c (FNC) e φ^d (FND) t.q. $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$

Formas normais

• literais: $p_i \in V^{CP}$ e $\neg p_i$;

• FNC: $((p_0 \vee p_1 \dots) \wedge \dots \wedge (p_2 \vee \dots))$

• FND: $((p_0 \wedge p_1 \dots) \vee \dots \vee (p_2 \wedge \dots))$

• Nota: literais, conjuntos de literais e disjunções de literais são simultaneamente FNC e FND

p_1	p_2	$\varphi_{\leftrightarrow}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$\varphi = p_1 \leftrightarrow p_2$

$\beta_1 = p_1 \wedge p_2$

$\alpha_1 = \neg p_1 \vee p_2$

$\alpha_2 = p_1 \vee \neg p_2$

$\beta_2 = \neg p_1 \wedge \neg p_2$

$\varphi^c = \alpha_1 \wedge \alpha_2$

$\varphi^d = \beta_1 \vee \beta_2$

• Teorema da correção: Se $\Gamma \vdash \varphi$ então $\Gamma \models \varphi$

→ Se Γ é semanticamente consistente então Γ é sintaticamente consistente

• Teorema da completude: para a formula φ e para o conjunto de formulas Γ se $\Gamma \models \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$

• Teorema da adequação: para toda a formula φ e para todo o conjunto de formulas Γ, $\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma \models \varphi$

→ Corolario: φ é um teorema se e só se

• Valorações

- Mostre que se $\Gamma \models p_2 \vee \neg p_3$ e $\Gamma \cup \{\neg p_1 \rightarrow p_2\}$ é semanticamente inconsistente então $\Gamma \cup \{p_3 \rightarrow p_1\}$ é semanticamente consistente.

Dizer que $v \models \Gamma$ significa que v satisfaz todas as formulas do conjunto Γ

: Verifica-se que

i) $\Gamma \models p_2 \vee \neg p_3$ implica que $v(p_2 \vee \neg p_3) = 1$

ii) $\Gamma \cup \{\neg p_1 \rightarrow p_2\}$ é sem. inconsistente então $v(\neg p_1 \rightarrow p_2) = 0$

• Por hipotese, $\Gamma \models p_2 \vee \neg p_3$ e que $\Gamma \cup \{\neg p_1 \rightarrow p_2\}$ é inconsistente então $v(p_2) = 1$ ou $v(\neg p_3) = 1$ e $v(p_1) = v(p_2) = 0$. Consequentemente, $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, pelo que $v(p_3 \rightarrow p_1) = 1$.

• Assim mostramos que existe uma valoração, v, que satisfaz todas as formulas do conjunto $\Gamma \cup \{p_3 \rightarrow p_1\}$. Isto implica que $\Gamma \cup \{p_3 \rightarrow p_1\}$ é semantic. consistente

Indução Estrutural $v(\varphi) = n^o$ de ocorrência de vars proposicionais em φ

• $v(\varphi) \geq v(\varphi[\perp/p_7])$

i) Caso $\varphi = p_i$

$v(\varphi) = v(p_1) = 1$

$v(\varphi[\perp/p_7]) = v(p_i[\perp/p_7]) \begin{cases} v(\perp) & i = 7 \\ v(p_i) & i \neq 7 \end{cases} = \begin{cases} 0 & i = 7 \\ 1 & i \neq 7 \end{cases}$

logo, $v(p_i) \geq v(p_i[\perp/p_7])$ ou seja $v(p_i)$ é verdadeira

ii) caso $\varphi = \perp$

$v(\varphi) = v(\perp) = 0$

$v(\varphi[\perp/p_7]) = v(\perp[\perp/p_7]) = v(\perp) = 0$ logo $v(\perp)$

iii) $\varphi = (\varphi_1 \square \varphi_2)$ com $\varphi_1, \varphi_2 \in F^{CP}$

• por hipotese de indução suponhamos que $p(\varphi_1)$ e $p(\varphi_2)$ são verdadeiros, ou seja, $v(\varphi_1) \geq v(\varphi_1[\perp/p_7])$ e $v(\varphi_2) \geq v(\varphi_2[\perp/p_7])$

$v(\varphi) = v(\varphi_1 \square \varphi_2) = v(\varphi_1) + v(\varphi_2)$

• $v(\varphi[\perp/p_7]) = v((\varphi_1 \square \varphi_2)[\perp/p_7]) = v((\varphi_1[\perp/p_7]) \square (\varphi_2[\perp/p_7]))$

$v(\varphi) = v(\varphi_1) + v(\varphi_2) \underset{\text{por h.i.}}{\geq} v(\varphi_1[\perp/p_7] + v_2[\perp/p_7]) = v(\varphi[\perp/p_7])$

• Logo, $p(\varphi)$ é verdadeira no caso em que φ é da forma $\varphi = (\varphi_1 \square \varphi_2)$

iv) $\varphi = (\neg\varphi_1)$ com $\varphi_1 \in F^{CP}$

• por hipotese de indução suponhamos que $v(\neg\varphi_1)$ é verdade, ou seja, $v(\neg\varphi_1) \geq v(\neg\varphi_1[\perp/p_7])$

• $v(\varphi) = v(\neg\varphi_1) = v(\varphi_1)$

• $v(\varphi[\perp/p_7]) = v((\neg\varphi_1)[\perp/p_7]) = v(\neg\varphi_1[\perp/p_7]) \underset{\text{por h.i.}}{=} v(\varphi_1[\perp/p_7])$

Logo $p(\varphi)$ é verdadeira no caso em que φ é da forma $\varphi = (\neg\varphi_1)$

∴ Por i) – iv) usando o princípio da indução estrutural conclui-se que $p(\varphi)$ é verdadeiro para toda a formula φ de F^{CP}

Recursão Estrutural

$v: F^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0$ é definida por recursão estrutural por

1) $v(p_i) = 0$, para qualquer $i \in \mathbb{N}_0$

2) $v(\perp) = 0$

3) $v((\neg\varphi)) = v(\varphi)$, para todo $\varphi \in F^{CP}$

4) $v((\varphi \square \psi)) = v(\varphi) + v(\psi)$ para todo o $\varphi, \psi \in F^{CP}$ e todo o $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Seja $\varphi \in F^{CP}$. Se $\perp \vdash \varphi$, então φ é uma contradição → F

Seja $\Gamma \subseteq F^{CP}$. Se $\Gamma \models \psi$ para qualquer $\psi \in F^{CP}$, então Γ contém uma contradição → Falso

• Se $\Gamma \cup \Delta$ é consistente Γ e Δ são consistentes

• $\Gamma \cup \Delta$ pode não ser consistente mesmo que Γ e Δ sejam

• Se Γ é consistente e $\varphi \in \Gamma$ então $\neg\varphi \notin \Gamma$

• Se Γ contém uma contradição é inconsistente

• F^{CP} → inconsistente

• $F^{CP}_{\{\vee, \wedge\}}$ → consistente

• use DNP que prove que $\underbrace{\neg p_1 \vee p_2, p_1}_{\text{n precisam de ser cancelados}} \vdash p_2$

$$\dfrac{\neg p_1 \vee p_2 \qquad \dfrac{\dfrac{p_1 \qquad \cancel{\neg p_1}^{(1)}}{\perp}\neg E}{p_2}(\perp) \qquad \cancel{p_2}^{(1)}}{p_2} \vee E^{(1)}$$