Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

MiEInf
2017/2018

Lógica EI

Exame de Recurso — 26 de junho de 2018 — duração: 2 horas

nome: ______________________________ número ____________

Grupo I

Este grupo é constituído por 5 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,5 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

		V	F
1.	Para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é tautologia, então $\varphi \vee \psi$ é tautologia.	☐	☐
2.	$p_0 \to \neg p_1, \neg p_0 \to p_1 \models p_0 \leftrightarrow \neg p_1$.	☐	☐
3.	Para quaisquer $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se Γ é semanticamente consistente e $\varphi \to \psi \in \Gamma$, então $\varphi \notin \Gamma$ ou $\neg\psi \notin \Gamma$.	☐	☐
4.	A fórmula $s(x_0) + x_1 < x_0 + x_1$ de tipo Arit é satisfazível.	☐	☐
5.	Para todo o tipo de linguagem L com um símbolo de relação unário Q, a fórmula $(\forall x_0\ \mathsf{Q}(x_0)) \to (\exists x_1\ \mathsf{Q}(x_1))$ é universalmente válida.	☐	☐

Grupo II

1. Considere o conjunto $X \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, definido indutivamente pelas seguintes regras:

   (1) Para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $p_i \in X$;

   (2) Para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $\neg p_i \in X$;

   (3) Para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \in X$ e $\psi \in X$, então $\varphi \wedge \psi \in X$.

   (a) Sem justificar, dê exemplo de uma fórmula de X com pelo menos três ocorrências de conetivos.

   (b) Prove, por indução estrutural em X, que nenhum elemento de X é tautologia.

2. Indique, justificando, uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente à fórmula $\neg((\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow ((p_1 \to \perp) \to p_2))$.

3. Construa uma derivação em DNP que mostre que $(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \vdash ((p_0 \wedge p_1) \to p_2)$.

4. Prove que, para quaisquer fórmulas φ, ψ e σ do Cálculo Proposicional e qualquer conjunto de fórmulas Γ do Cálculo Proposicional, se $\varphi \vee \sigma$ é um teorema de DNP e $\Gamma, \varphi \models \psi$, então $\Gamma \vdash \sigma \vee \psi$.

Grupo III

(Nas seguintes questões, exceto na 6(a), apresente cada resposta no espaço disponibilizado para o efeito.)

Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{0}, \mathsf{x}\}, \{\mathsf{Q}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{0}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{x}) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{Q}) = 1$ e $\mathcal{N}(<) = 2$. Seja $E = (\mathbb{R}, \overline{})$ a estrutura de tipo L tal que:

$\overline{\mathsf{0}}$ é o número zero	$\overline{\mathsf{Q}}$ é o predicado "é racional" em $\mathbb{R}$
$\overline{\mathsf{x}}$ é a multiplicação em $\mathbb{R}$	$\overline{<}$ é a relação "menor do que" em $\mathbb{R}$

1. Sem justificar, dê exemplo de um termo de tipo L com exatamente duas ocorrências do símbolo x e quatro subtermos.

2. Sem justificar, dê exemplo de um termo t de tipo L tal que $x_1 \in VAR(t)$ e $\overline{t}_\alpha$ não depende da atribuição α em E.

3. Defina, por recursão estrutural, a função $f : \mathcal{T}_L \to \mathbb{N}_0$ que a cada termo t faz corresponder o número de ocorrências de constantes em t.

4. Seja α a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $\alpha(x_i) = i - 2$. Indique, sem justificar, $\overline{((x_1 \times x_3) \times x_1)}_\alpha$.

5. Sem justificar, apresente uma fórmula de tipo L, verdadeira em E, que represente a seguinte afirmação: O produto de dois racionais positivos é um racional positivo.

6. Seja φ a fórmula $\forall x_0\ \neg(x_0 \times x_0 < \mathsf{0})$.
   (a) Prove que φ é verdadeira em E.
   (b) Indique, sem justificar, uma estrutura E' de tipo L que seja diferente de E apenas na interpretação de algum dos símbolos de função de L e tal que φ não seja verdadeira em E'.

Cotações	I	II	III
	5	4,5+2,5+2+1,5	0,5+0,5+1+0,5+0,5+1,5