LÓGICA EI

Exame de recurso 2017/2018 26/junho

Grupo I

1. F

Consideremos $\varphi = \psi = \perp$. Temos que $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ mas $\not\models \varphi \vee \psi$.

2. V

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$p_0 \to \neg p_1$	$\neg p_0 \to p_1$	$p_0 \leftrightarrow \neg p_1$
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0

Pela tabela sabemos que se v é uma valoração tal que $v(p_0 \to \neg p_1) = v(\neg p_0 \to p_1) = 1$, então $v(p_0 \leftrightarrow \neg p_1) = 1$ (2ª e 3ª linhas).

Logo, $p_0 \to \neg p_1, \neg p_0 \to p_1 \models p_0 \leftrightarrow \neg p_1$.

3. V

Admitamos que T, φ e ψ são tais que T é consistente e $\varphi \to \psi \in T$. Então, existe pelo menos uma valoração v tal que v sat. T, ou seja, tal que $v(\sigma) = 1$ para todo $\sigma \in T$. Se $\varphi \in T$ e $\neg\psi \in T$, teríamos $v(\varphi \to \psi) = 1$, $v(\varphi) = 1$ e $v(\neg\psi) = 1$, o que é impossível. Como não podemos ter $(\varphi \in T \wedge \neg\psi \in T)$, segue-se que $\neg\varphi \notin T$ ou $\neg\psi \notin T$.

4. V

Consideremos a estrutura $E = (\mathbb{N}_0, \tilde{\ })$ exatamente igual a NATS exceto na interpretação do símbolo de relação $<$, que é interpretado como

$\tilde{<}$ = relação "maior do que".

Seja $\alpha : \mathcal{V} \to \mathbb{N}_0$ a atribuição em E dada por $\alpha(x_i) = i$ $(i \in \mathbb{N}_0)$.

Então,

$\overline{s(x_0) + x_1 < x_0 + x_1}\,\alpha = 1$ se e só se $\left(\overline{s(x_0) + x_1}\,\alpha, \overline{x_0 + x_1}\,\alpha\right) \in \tilde{<}$

se e só se $\alpha(x_0)+1+\alpha(x_1)$ é maior do que $\alpha(x_0)+\alpha(x_1)$, o que é verdade.

Assim, $\overline{s(x_0)+x_1 < x_0+x_1}\,\alpha = 1$. Logo, (E,α) sat. $s(x_0)+x_1 < x_0+x_1$ e, portanto, $s(x_0)+x_1 < x_0+x_1$ é satisfazível.

5. V

Sejam $E = (D, \overline{})$ uma estrutura de tipo L e α uma atribuição em E. Temos que

$\overline{\forall x_0\, Q(x_0) \to \exists x_1\, Q(x_1)}\,\alpha = 1$ sse $\overline{\forall x_0\, Q(x_0)}\,\alpha = 0$ ou $\overline{\exists x_1\, Q(x_1)}\,\alpha = 1$ sse Existe $d \in D$ t.q. $\overline{Q(x_0)}\,\alpha\binom{d}{x_0} = 0$ ou Existe $d \in D$ t.q. $\overline{Q(x_1)}\,\alpha\binom{d}{x_1} = 1$ sse Existe $d \in D$ t.q. $d \notin \overline{Q}$ ou Existe $d \in D$ t.q. $d \in \overline{Q}$, o que é obviamente verdade. Portanto, $\overline{\forall x_0\, Q(x_0) \to \exists x_1\, Q(x_1)}\,\alpha = 1$.

Assim, $\overline{\forall x_0\, Q(x_0) \to \exists x_1\, Q(x_1)}\,\alpha = 1$ para toda a atribuição α em E, donde $\forall x_0\, Q(x_0) \to \exists x_1\, Q(x_1)$ é verdadeira em E. Sendo E uma estrutura de tipo L arbitrária, a fórmula dada é universalmente válida.

Grupo II

1. (a) $(p_0 \land \neg p_1) \land p_2 \in X$ e tem três ocorrências de conetivos

(b) Seja $P(\varphi)$ a propriedade "φ não é tautologia" sobre os elementos φ de X.

(i) É óbvio que p_i não é uma tautologia, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. De facto, se considerarmos a valoração v que atribui o valor lógico 0 a todas as variáveis proposicionais, segue-se que $v(p_i) = 0$ e p_i não é tautologia. Logo,

$$P(p_i), \text{ para todo } i \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) Sejam $i \in \mathbb{N}_0$ e v' a valoração que atribui o valor lógico 1 a todas as variáveis proposicionais. Temos que $v'(\neg p_i) = 0$, pelo que $\neg p_i$ não é uma tautologia. Logo, $P(\neg p_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Sejam $\varphi, \psi \in X$ tais que $P(\varphi)$ e $P(\psi)$. Então, φ não é uma tautologia e ψ não é tautologia. Existe, pois, uma valoração v'' tal que $v''(\varphi) = 0$. Note-se que $v''(\varphi \wedge \psi) = 0$, pelo que $\varphi \wedge \psi$ não é uma tautologia, ou seja, $P(\varphi \wedge \psi)$.

Por (i), (ii) e (iii), pelo Princípio de Indução Estrutural para X, $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in X$.

2.

p_0	p_1	p_2	$\neg p_0$	$\neg p_0 \vee p_1$	$p_1 \to \perp$	$(p_1 \to \perp) \to p_2$	$(\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow ((p_1 \to \perp) \to p_2)$	$\neg\left((\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow ((p_1 \to \perp) \to p_2)\right)$
1	1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1

Seja $\varphi = \neg\left((\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow ((p_1 \to \perp) \to p_2)\right)$. Temos que

$\varphi \Leftrightarrow (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2)$, sendo esta fórmula uma FND.

4. Admitamos que $\vdash \varphi \vee \sigma$ e que $T, \varphi \vDash \psi$. Pelo Teorema da Completude, $T, \varphi \vdash \psi$. Sabemos, então, que existe uma derivação D_1 em DNP de conclusão $\varphi \vee \sigma$ sem hipóteses não canceladas e uma derivação D_2 em DNP de conclusão ψ cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\Delta \subseteq T \cup \{\varphi\}$.

Assim,

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \vee \sigma \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi}^{(1)} \\ D_2 \\ \psi \end{array}}{\sigma \vee \psi} \qquad \dfrac{\cancel{\sigma}^{(1)}}{\sigma \vee \psi}}{\sigma \vee \psi} \vee E^{(1)}$$

é uma derivação de conclusão $\sigma \vee \psi$ cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\Delta \setminus \{\varphi\}$. Logo, é uma derivação de $\sigma \vee \psi$ a partir de T. Portanto,

$$T \vdash \sigma \vee \psi.$$

[RESOLUÇÃO ALTERNATIVA: Admitamos que $\vdash \varphi \vee \sigma$ e que $T, \varphi \vDash \psi$. Pelo Teorema da Correção, $\vDash \varphi \vee \sigma$. Vejamos que $T \vdash \sigma \vee \psi$.
Seja v uma valoração tal que v sat. T. Temos dois casos possíveis:

(a) $v(\varphi) = 1$
(b) $v(\varphi) = 0$

CASO (a): Se $v(\varphi) = 1$, como v sat. T, segue-se que v sat. $T \cup \{\varphi\}$.

Dado que $T, \varphi \vDash \psi$, temos que $v(\psi) = 1$ e, por conseguinte $v(\sigma \vee \psi) = 1$.

CASO (b): Se $v(\varphi) = 0$, então, porque $\vDash \varphi \vee \sigma$, temos que $v(\varphi \vee \sigma) = 1$ e, por isso, $v(\sigma) = 1$. Logo, $v(\sigma \vee \psi) = 1$.

Assim, em ambos os casos, $v(\sigma \vee \psi) = 1$. Portanto, se v é uma valoração tal que v sat. T, então $v(\sigma \vee \psi) = 1$, pelo que $T \vDash \sigma \vee \psi$ e, pelo Teorema da Completude, $T \vdash \sigma \vee \psi$.

Grupo III

1. $(x_0 \times x_1) \times x_0$

(subtermos: x_0, x_1, $x_0 \times x_1$, $(x_0 \times x_1) \times x_0$)

2. Seja $t = x_1 \times 0$.

$x_1 \in VAR(t) = \{x_1\}$ e, para toda a atribuição α em $\mathcal{E}$,

$\overline{x_1 \times 0}\,\alpha = \alpha(x_1) \,\overline{\times}\, \overline{0} = \alpha(x_1) \times 0 = 0$.

3. $f : T_L \to \mathbb{N}_0$ é definida por recursão estrutural do seguinte modo:

(1) $f(0) = 1$
(2) $f(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$
(3) $f(t_1 \times t_2) = f(t_1) + f(t_2)$, para todo $t_1, t_2 \in T_L$.

4. $\alpha(x_1) = 1-2 = -1$
$\alpha(x_3) = 3-2 = 1$

$\overline{((x_1 \times x_3) \times x_1)}\,\alpha = (-1) \times 1 \times (-1) = 1$.

5. $\forall x_1 \forall x_2 \left(\left(\left(\left(Q(x_1) \wedge Q(x_2) \right) \wedge 0 < x_1 \right) \wedge 0 < x_2 \right) \to \left(Q(x_1 \times x_2) \wedge 0 < x_1 \times x_2 \right) \right)$.

6.
(a) Seja α uma atribuição em $\mathcal{E}$. Temos que

$\overline{\varphi}\alpha = 1$ sse $\overline{\forall x_0 \neg (x_0 \times x_0 < 0)}\,\alpha = 1$
sse Para todo $d \in \mathbb{R}$, $\overline{\neg (x_0 \times x_0 < 0)}\,\alpha\binom{d}{x_0} = 1$

sse Para todo $d \in \mathbb{R}$, $\overline{(x_0 \times x_0 < 0)}\,\alpha\binom{d}{x_0} = 0$

sse Para todo $d \in \mathbb{R}$, $(d^2, 0) \notin \overline{<}$

sse Para todo $d \in \mathbb{R}$, $d^2 \geq 0$, o que é verdade.

Logo, $\overline{\varphi}\alpha = 1$. Assim, $\overline{\varphi}\alpha = 1$ para toda a atribuição α em $\mathcal{E}$, pelo que φ é verdadeira em $\mathcal{E}$.

(b) Consideremos $\mathcal{E}' = (\mathbb{R}, \tilde{\ })$ igual a $\mathcal{E}$ exceto na interpretação de 0 que é $\tilde{0}$: o número 10.

Dada uma atribuição α em $\mathcal{E}'$,

$$\overline{\varphi}\alpha = 1 \text{ sse Para todo } d \in \mathbb{R} \quad (d^2, 10) \notin \tilde{<}$$
$$\text{sse Para todo } d \in \mathbb{R} \quad d^2 \geq 10,$$ o que não é verdade.

De facto, $d = 2 \in \mathbb{R}$ e $d^2 = 4 \ngeq 10$.

Logo, $\overline{\varphi}\alpha = 0$ e φ não é verdadeira em $\mathcal{E}'$.