Universidade do Minho
Dep. Matemática

MiEInf
2020/2021

Lógica EI

Exame de Recurso — 23 de junho de 2021 — duração: 2 horas

nome: ______________________ número: ____________

Grupo I

Responda a cada uma das 8 questões deste grupo no enunciado, no espaço disponibilizado a seguir à questão, **sem apresentar justificações**.

1. Dê exemplo de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional tal que $subf(\neg(p_0 \wedge \varphi) \vee p_2)$ tem cinco elementos.

   Resposta:

2. Para cada fórmula do Cálculo Proposicional φ, considere o conjunto $\Gamma_\varphi = \{p_0 \vee \varphi, p_0 \to (p_1 \wedge \varphi)\}$. Dê exemplo de φ tal que $p_1 \in var(\varphi)$ e Γ_φ é um conjunto inconsistente.

   Resposta:

3. Seja $\Gamma = \{\neg p_1 \wedge p_0, p_2 \leftrightarrow \neg p_0\}$. Dê exemplo de uma valoração v tal que v não satisfaz Γ.

   Resposta:

4. Considere a fórmula $\varphi = \neg p_0 \wedge (p_1 \vee \neg p_2)$. Dê exemplo de uma fórmula ψ do Cálculo Proposicional tal que $\psi \Leftrightarrow \varphi$ e cujos conetivos estão no conjunto $\{\neg, \to\}$.

   Resposta:

Nas restantes questões deste grupo, considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{0}, \mathsf{s}, \times\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{0}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{s}) = 1$, $\mathcal{N}(\times) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$, e considere a L-estrutura $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ tal que:

$$\overline{\mathsf{0}} = 0 \qquad \overline{\mathsf{P}} = \{z \in \mathbb{Z} : z > 0\}$$

$$\overline{\mathsf{s}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ tal que } \overline{\mathsf{s}}(z) = -z \qquad \overline{=} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : z_1 = z_2\}$$

$$\overline{\times} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \text{ tal que } \overline{\times}(z_1, z_2) = z_1 \times z_2$$

5. Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i+2$. Indique o valor de: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(x_1) \times x_2)\ [a]_E$.

   Resposta:

6. Indique uma fórmula de tipo L válida em E que represente a afirmação: Para qualquer número estritamente positivo, o seu simétrico é um número estritamente negativo.

   Resposta:

7. Seja φ a L-fórmula: $\forall x_0\, \mathsf{P}(x_0) \to \forall x_1\, \mathsf{P}(x_1 \times x_0)$. Calcule $\varphi[s(x_1)/x_0]$.

   Resposta:

8. Seja φ a L-fórmula: $\mathsf{P}(x_0) \to \forall x_1 \neg \mathsf{P}(x_1 \times x_0)$. Indique um L-termo t tal que x_0 não está livre para t em φ.

   Resposta:

Grupo II

Responda às 6 questões deste grupo na folha de exame, **justificando** convenientemente as respostas.

1. Defina por recursão estrutural a função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0,1\}$ tal que $f(\varphi) = 1$ se e só se $var(\varphi) \subseteq \{p_1\}$.
2. Indique uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente à fórmula $((\neg p_1 \leftrightarrow p_2) \to p_3) \vee \perp$. (Justifique.)
3. Diga se: $\neg p_0 \vee p_1, (p_1 \to \neg p_2) \wedge p_0 \models p_0 \wedge \neg p_2$. (Justifique.)
4. Sejam $\varphi = (p_0 \wedge p_1) \to p_2$ e $\psi = p_0 \to (p_1 \to p_2)$.
   (a) Construa uma demonstração em DNP da fórmula $\varphi \to \psi$.
   (b) Mostre que: $\varphi, \psi \nvdash \perp$.
5. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{0}, \mathsf{s}, \times\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ e a L-estrutura $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ do Grupo I. Seja φ a L-fórmula: $\mathsf{P}(x_0) \to \exists x_1 \neg \mathsf{P}(\mathsf{s}(x_1) \times x_0)$.
   (a) Prove que φ é válida em E.
   (b) Mostre que φ não é universalmente válida.
6. Sejam L um tipo de linguagem, φ e ψ fórmulas de tipo L e x uma variável tal que $x \notin LIV(\psi)$. Prove que: $(\exists x \varphi) \to \psi, \varphi \models \forall x \psi$.

Cotações	II (8 valores)	II (12 valores)
	1+1+1+1+1+1+1+1	1,75+1,75+1,75+3,25+2,5+1