Exame de recurso
23 junho de 2021

Grupo I

1)

$$\text{subf}\,(\neg(p_0 \wedge \varphi) \vee p_2) = \{p_0, p_2, p_0 \wedge \varphi, \neg(p_0 \wedge \varphi), \neg(p_0 \wedge \varphi) \vee p_2\}$$
$$\cup \ \text{subf}\,(\varphi)$$

só tem 5 elementos se subf(φ) só tiver elementos que já pertencem a $\{p_0, p_2, p_0 \wedge \varphi, \neg(p_0 \wedge \varphi), \neg(p_0 \wedge \varphi) \vee p_2\}$

$$\varphi = p_0$$

2) $\Gamma_\varphi = \{p_0 \vee \varphi, \ p_0 \to (p_1 \wedge \varphi)\}$

$\varphi = \neg p_1 \wedge p_0 \qquad p_1 \in \text{var}\,(\varphi)$

e Γ_φ é inconsistente

$\big(v\,(p_0 \to (p_1 \wedge (\neg p_1 \wedge p_0))) = 1 \iff v(p_0) = 0$
mas, assim, $v\,(p_0 \vee \varphi) = 0 \big)$

3) $\Gamma = \{\neg p_1 \wedge p_0, \ p_2 \leftrightarrow \neg p_0\}$

Seja v a valoração tal que $v(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$.
Temos que $v\,(\neg p_1 \wedge p_0) = 0$. Portanto, $v \not\models \Gamma$.

4) $\varphi = \neg p_0 \wedge (p_1 \vee \neg p_2)$

$\iff (p_1 \vee \neg p_2) \wedge \neg p_0$
$\iff \neg\,((p_1 \vee \neg p_2) \to p_0) \iff \neg\,((\neg p_2 \vee p_1) \to p_0)$
$\iff \underbrace{\neg((p_2 \to p_1) \to p_0)}_{\psi}$

$\neg(\sigma \to \psi)$
$\iff \sigma \wedge \neg\psi$

$\sigma \to \psi$
$\iff \neg\sigma \vee \psi$

Grupo II

1.

$f : \mathcal{F}^{CP} \to \{0,1\}$ é definida recursivamente por

ⓐ $f(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\} \end{cases}$

ⓑ $f(\bot) = 1$ (*)

ⓒ $f((\neg\varphi)) = f(\varphi)$, (**)
para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$

ⓓ $f((\varphi \square \psi)) = f(\varphi) \times f(\psi)$, (***)
para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

(*) OBS: $var(\bot) = \emptyset \subseteq \{p_1\}$

(**) OBS: $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$
Logo, $var(\neg\varphi) \subseteq \{p_1\}$
$\Updownarrow$
$var(\varphi) \subseteq \{p_1\}$

(***) OBS: $var(\varphi \square \psi) =$
$= var(\varphi) \cup var(\psi)$
Logo, $var(\varphi \square \psi) \subseteq \{p_1\}$
mesmo $var(\varphi) \subseteq \{p_1\}$ e
$var(\psi) \subseteq \{p_1\}$

portanto,
$f((\varphi \square \psi))$ só deve ser 1
se ambos $f(\varphi)$ e $f(\psi)$ forem 1
e 0 nos restantes casos.

2.

$((\neg p_1 \leftrightarrow p_2) \to p_3) \vee \bot \Leftrightarrow (\neg p_1 \leftrightarrow p_2) \to p_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((\neg p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to \neg p_1)) \to p_3$

$\Leftrightarrow \neg((\neg p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to \neg p_1)) \vee p_3$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p_1 \to p_2) \vee \neg(p_2 \to \neg p_1) \vee p_3$

$\Leftrightarrow (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_2 \wedge p_1) \vee p_3$, que é uma FND

R: $(\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_2 \wedge p_1) \vee p_3$

3) $\neg p_0 \vee p_1, \ (p_1 \to \neg p_2) \wedge p_0 \models p_0 \wedge \neg p_2$

Seja v uma valoração.

$v((p_1 \to \neg p_2) \wedge p_0) = 1 \iff \begin{cases} v(p_1 \to \neg p_2) = 1 \\ v(p_0) = 1 \quad (*) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} v(\neg p_0 \vee p_1) = 1 \\ v(p_0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow v(p_1) = 1$

$\left.\begin{array}{l} v(p_1 \to \neg p_2) = 1 \\ v(p_1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow v(p_2) = 0 \quad (**)$

De $(*)$ e de $(**)$, $v(p_0 \wedge \neg p_2) = 1$.

Logo, se v é tal que $v(\neg p_0 \vee p_1) = 1$ e $v((p_1 \to \neg p_2) \wedge p_0) = 1$, então é garantido que $v(p_0 \wedge \neg p_2) = 1$

Portanto, $\neg p_0 \vee p_1, \ (p_1 \to \neg p_2) \wedge p_0 \models p_0 \wedge \neg p_2$

(em alternativa:

p_0	p_1	p_2	$\neg p_0$	$\neg p_2$	$\neg p_0 \vee p_1$	$p_1 \to \neg p_2$	$(p_1 \to \neg p_2) \wedge p_0$	$p_0 \wedge \neg p_2$
1	1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	$\boxed{1}$
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0

há apenas um caso em que estas fórmulas são ambas verdadeiras e, nesse caso, também $p_0 \wedge \neg p_2$ é verdadeira.)

4. a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(2)} \qquad \cancel{p_1}^{(3)}}{p_0 \land p_1} \qquad \cancel{(p_0 \land p_1) \to p_2}^{(1)}}{p_2}\,{\scriptstyle \to E}}{p_1 \to p_2}\,{\scriptstyle \to I^{(3)}}}{p_0 \to (p_1 \to p_2)}\,{\scriptstyle \to I^{(2)}}}{((p_0 \land p_1) \to p_2) \to (p_0 \to (p_1 \to p_2))}\,{\scriptstyle \to I^{(1)}}$$

é uma derivação em DNP de $\varphi \to \psi$ sem hipóteses por cancelar. Logo, é uma demonstração em DNP de $\varphi \to \psi$.