Lógica

exame de recurso — 17 de junho de 2022 — duração: 2 horas

nome: ______________________ número: __________

Grupo I

Responda a cada uma das 8 questões deste grupo no enunciado, no espaço disponibilizado a seguir à questão, **sem apresentar justificações**.

1. Dê exemplo de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional que tenha exatamente três subfórmulas e tal que $var((p_0 \vee p_1)[\varphi/p_1]) = \{p_0\}$.

   Resposta:

2. Seja $\Gamma = \{p_1, p_1 \leftrightarrow \neg p_2, p_2 \leftrightarrow \neg p_3\}$. Dê exemplo de uma valoração v tal que $v \models \Gamma$.

   Resposta:

3. Dê exemplo de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional tal que φ não seja uma contradição mas $\varphi \wedge (p_0 \rightarrow \neg p_1)$ seja uma contradição.

   Resposta:

4. Considere a fórmula $\varphi = p_0 \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_0)$. Dê exemplo de uma fórmula ψ do Cálculo Proposicional tal que $\psi \Leftrightarrow \varphi$ e cujos conetivos estão no conjunto $\{\neg, \vee\}$

   Resposta:

Nas questões 5. e 6. deste grupo, considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}, \mathsf{g}\}, \{\mathsf{R}\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{g}) = 1$ e $\mathcal{N}(\mathsf{R}) = 3$, e considere a L-estrutura $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ tal que:

$$\bar{\mathsf{c}} = 2 \qquad \bar{\mathsf{f}} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \text{ tal que } \bar{\mathsf{f}}(i,j) = i \times j$$
$$\bar{\mathsf{g}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ tal que } \bar{\mathsf{g}}(i) = -i \qquad \overline{\mathsf{R}} = \{(i,j,k) \in \mathbb{Z}^3 \mid i - j = k\}$$

5. Dê exemplo de uma atribuição a em E tal que $\mathsf{f}(\mathsf{c}, x_2)[a]_E = \mathsf{g}(\mathsf{c})[a]_E$.

   Resposta:

6. Indique uma L-fórmula válida em E que represente a afirmação: Todo o inteiro subtraído do seu simétrico é igual ao seu dobro.

   Resposta:

7. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}\}, \{\mathsf{P}, \mathsf{Q}\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(\mathsf{Q}) = 2$. Indique o número de L-estruturas cujo domínio é $\{0\}$.

   Resposta:

8. Considere o tipo de linguagem $L = L_{\text{Arit}}$. Seja $\psi = \forall x_1 \exists x_2 \neg(x_0 \times x_1 < x_2)$. Dê exemplo de um L-termo t tal que x_0 não seja livre para t em ψ.

   Resposta:

Grupo II

Responda às 7 questões deste grupo na folha de exame, **justificando** convenientemente as respostas.

1. Seja $f : \mathcal{F}^{CP} \to \mathbb{N}_0$ a função que a cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ faz corresponder o número de ocorrências da variável proposicional p_0 em φ. Prove por indução estrutural que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $f(\varphi[p_0 \wedge p_1/p_0]) = f(\varphi)$.
2. Verifique se $p_0 \to \perp, p_1 \to p_0 \models \neg p_1$. Justifique.
3. Indique, justificando, uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente à fórmula $(p_0 \leftrightarrow p_1) \vee (p_1 \wedge p_2)$.
4. Apresente uma demonstração em DNP de $(p_0 \wedge \neg(p_1 \wedge p_2)) \to (p_1 \to \neg p_2)$.
5. Considere de novo o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}, \mathsf{g}\}, \{\mathsf{R}\}, \mathcal{N})$ e a L-estrutura $E = (\mathbb{Z}, \bar{\ })$ das perguntas 5. e 6. do Grupo I. Seja φ a L-fórmula: $\forall x_1 \,(\mathsf{R}(\mathsf{f}(x_1, x_1), \mathsf{c}, \mathsf{g}(\mathsf{c})) \to \mathsf{R}(x_1, \mathsf{c}, \mathsf{g}(\mathsf{c})))$. Mostre que φ é válida em E.
6. Sejam L um tipo de linguagem, φ e ψ fórmulas de tipo L e x uma variável tal que $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$. Mostre que: $\neg \exists x(\psi \wedge \neg \varphi), \exists x \psi \models \varphi$.
7. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}\}, \{\mathsf{P}, \mathsf{Q}\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, e $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = \mathcal{N}(\mathsf{Q}) = 1$. Mostre que: $\Gamma = \{\forall x_0(\mathsf{P}(x_0) \to \neg \mathsf{Q}(x_0)), \mathsf{P}(\mathsf{c}) \wedge \mathsf{Q}(\mathsf{c})\}$ é sintaticamente inconsistente.

Cotações	I (8 valores)	II (12 valores)
	1+1+1+1+1+1+1+1	1,5+1,75+1,75+2+1,75+1,5+1,75