Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

MiEInf
2017/2018

Lógica EI

2.º Teste — 5 de junho de 2018 — duração: 2 horas

nome: ______________________ número ____________

Grupo I

Este grupo é constituído por 5 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,5 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

	V	F
1. $p_0, \neg p_1 \vdash p_0 \vee p_1$.	☐	☐
2. O conjunto $\{(p_0 \vee \neg p_1) \to p_0,\ p_1 \wedge \neg p_2\}$ é sintaticamente inconsistente.	☐	☐
3. Para todo o tipo de linguagem com um símbolo de função f e um símbolo de relação R, ambos binários, x_0 está livre para $\mathsf{f}(x_1, x_2)$ em $\forall x_0 \mathsf{R}(x_0, x_1) \to \exists x_2 \mathsf{R}(x_0, x_2)$.	☐	☐
4. A fórmula $s(x_0) + s(x_1) = s(x_0 + x_1)$ de tipo Arit é satisfazível.	☐	☐
5. Para todo o tipo de linguagem L com um símbolo de relação unário P, a fórmula $\forall x_0 (\mathsf{P}(x_0) \to \mathsf{P}(x_0))$ é universalmente válida.	☐	☐

Grupo II

1. Sejam $\varphi = \neg(p_0 \wedge p_1) \wedge p_2$ e $\psi = p_0 \to \neg p_1$.
   (a) Construa uma demonstração de $\varphi \to \psi$ em DNP.
   (b) Mostre que, no entanto, $\nvdash \psi \to \varphi$.
2. Prove que, para qualquer $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ e quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e $\psi \to \sigma$ é uma tautologia, então $\Gamma \vdash \varphi \to \sigma$.

Grupo III

(Nas seguintes questões, exceto na 6(a), apresente cada resposta no espaço disponibilizado para o efeito.)

Considere o tipo de linguagem $L = (\{1, \mathsf{d}, \mathsf{x}\}, \{\mathsf{P}, >\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(1) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{d}) = 1$, $\mathcal{N}(\mathsf{x}) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(>) = 2$. Seja $E = (\mathbb{N}, \overline{})$ a L-estrutura tal que:

$\overline{1} = 1$	$\overline{\mathsf{P}}$ é o predicado "é par" em $\mathbb{N}$
$\overline{\mathsf{d}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\overline{\mathsf{d}}(n) = 2n$	$\overline{>}$ é a relação "maior do que" em $\mathbb{N}$
$\overline{\mathsf{x}}$ é a multiplicação em $\mathbb{N}$	

1. Sem justificar, dê exemplo de um termo de tipo L com pelo menos 2 ocorrências de um dos símbolos de função de L.

2. Sem justificar, dê exemplo de um termo t de tipo L tal que $x_1, x_2 \in VAR((\mathsf{d}(x_0) \times 1)[t/x_0])$.

3. Defina, por recursão estrutural, a função $f : \mathcal{T}_L \to \mathbb{N}_0$ que a cada termo t faz corresponder o número de ocorrências de símbolos de função não constantes em t.

4. Seja α a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $\alpha(x_i) = 3i$. Indique, sem justificar, $\overline{\mathsf{d}(\mathsf{d}(x_1) \times x_2)}_\alpha$.

5. Considere a fórmula $\psi = \neg\mathsf{P}(x_1 \times x_2)$. Seja α uma atribuição em E tal que $\alpha(x_1) = 5$. Indique, sem justificar, uma condição que α tem de satisfazer de modo a que $\overline{\psi}_\alpha = 1$.

6. Seja φ a $L-$fórmula $\exists x_1(\mathsf{d}(x_1) > x_1 \times x_1)$.
   (a) Prove que φ é verdadeira em E.
   (b) Indique, sem justificar, uma estrutura E' de tipo L que seja diferente de E apenas na interpretação do símbolo d e tal que φ não seja verdadeira em E'.

Cotações	I	II	III
	5	2+1,75+1,5	1,5+1,5+2,5+1+1+1,25+1