Lógica E1

2º teste

5 jun 2018

Grupo I

1. V

$$\frac{p_0}{p_0 \vee p_1} \vee_I I$$

é uma derivação de conclusão $p_0 \vee p_1$ cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{p_0\}$. Como $\{p_0\} \subseteq \{p_0, \neg p_1\}$, segue-se que $p_0 \vee p_1$ é derivável a partir de $\{p_0, \neg p_1\}$, ou seja, $p_0, \neg p_1 \vdash p_0 \vee p_1$

[Em alternativa, consideremos uma valoração v tal que v sat. $\{p_0, \neg p_1\}$. Então, $v(p_0) = v(\neg p_1) = 1$, ou seja, $v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = 0$. Logo, $v(p_0 \vee p_1) = 1$. Provámos que se v é uma valoração tal que v sat. $\{p_0, \neg p_1\}$, então $v(p_0 \vee p_1) = 1$. Logo, $p_0, \neg p_1 \models p_0 \vee p_1$ e, pelo Teorema da Completude, $p_0, \neg p_1 \vdash p_0 \vee p_1$.

2. F Seja v uma valoração. Temos que

$$v(p_1 \wedge \neg p_2) = 1 \quad \text{sse} \quad v(p_1) = 1 \text{ e } v(p_2) = 0.$$

Se v for tal que $v(p_0) = 1$, então

$$v((p_0 \vee \neg p_1) \to p_0) = 1.$$

Assim, se v é uma valoração tal que $v(p_0) = v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 0$, então v sat. $\{(p_0 \vee \neg p_1) \to p_0,\ p_1 \wedge \neg p_2\}$, pelo que este conjunto é semanticamente consistente.

Logo, o conjunto é sintaticamente consistente.

3. F

x_0 tem uma ocorrência livre na fórmula no alcance da ocorrência de $\exists x_2$. Como $x_2 \in VAR(f(x_1,x_2))$, x_0 não está livre para $f(x_1,x_2)$ em $\forall x_0\, R(x_0,x_1) \rightarrow \exists x_2\, R(x_0,x_2)$.

4. V Seja $E = (\mathbb{N}_0, \sim)$ a estrutura de tipo Arit exatamente igual a NATS exceto na interpretação do símbolo s, sendo $\tilde{s}$ a função $\tilde{s} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ definida por $\tilde{s}(n) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Dada uma atribuição α em E, temos que

$$\overline{s(x_0) + s(x_1) = s(x_0 + x_1)}\ \alpha = 1$$

$$\text{sse} \quad \left(\tilde{+}\left(\tilde{s}(\alpha(x_0)), \tilde{s}(\alpha(x_1))\right), \tilde{s}\left(\tilde{+}(\alpha(x_0), \alpha(x_1))\right)\right) \in \tilde{=}$$

$$\text{sse} \quad \alpha(x_0) + \alpha(x_1) = \alpha(x_0) + \alpha(x_1)$$, o que é verdade.

Logo, $s(x_0) + s(x_1) = s(x_0 + x_1)$ é satisfazível.

5. V

Seja $\varphi = (\forall x_0\ P(x_0) \rightarrow P(x_0))$. Seja (E,α) uma valoração de tipo L. Temos que

$$\overline{\varphi}\alpha = 1 \text{ sse Para todo } d \in dom(E),\ \overline{P(x_0) \rightarrow P(x_0)}\ \alpha\binom{d}{x_0} = 1$$

$$\text{sse Para todo } d \in dom(E),\ \left(\overline{P(x_0)}\alpha\binom{d}{x_0} = 0 \text{ ou } \overline{P(x_0)}\alpha\binom{d}{x_0} = 1\right)$$

$$\text{sse Para todo } d \in dom(E),\ (d \notin \overline{P} \text{ ou } d \in \overline{P})$$, o que é verdade.

Portanto, $\overline{\varphi}\alpha = 1$, para toda a valoração (E,α) de tipo L, pelo que φ é universalmente válida.

Grupo II

1.

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(2)} \qquad \cancel{p_1}^{(3)}}{p_0 \wedge p_1}\wedge I \qquad \dfrac{\cancel{\neg(p_0 \wedge p_1) \wedge p_2}^{(1)}}{\neg(p_0 \wedge p_1)}\wedge_1 E}{\bot}\neg E}{\neg p_1}\neg I^{(3)}}{p_0 \to \neg p_1}\to I^{(2)}}{(\neg(p_0 \wedge p_1) \wedge p_2) \to (p_0 \to \neg p_1)}\to I^{(1)}$$

é uma demonstração de $\varphi \to \psi$ em DNP

b) Como corolário do Teorema da Correção, sabemos que se $\not\models \psi \to \varphi$ então $\nvdash \psi \to \varphi$.

Ora, se v é uma valoração tal que $v(p_0)=1$, $v(p_1)=0$ e $v(p_2)=0$, então $v(\psi)=1$ e $v(\varphi)=0$. Assim, $v(\psi \to \varphi)=0$, pelo que $\psi \to \varphi$ não é tautologia.

Logo, $\nvdash \psi \to \varphi$.

2. Admitamos que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e que $\models \psi \to \sigma$. Pelo Teorema da Completude sabemos que $\vdash \psi \to \sigma$. Assim, existe uma derivação D_1 de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e existe uma demonstração D_2 de $\psi \to \sigma$. Logo,

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}^{(1)}\\ D_1\\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}D_2\\ \psi \to \sigma\end{array}}{\sigma}\to E}{\varphi \to \sigma}\to I^{(1)}$$

é uma derivação de $\varphi \to \sigma$ cujas hipóteses não canceladas são exatamente as de D_1 exceto as iguais a φ. Logo, as hipóteses não canceladas desta derivação são elementos de Γ. Portanto, $\Gamma \vdash \varphi \to \sigma$.

[Em alternativa, admitamos que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e que $\models \psi \to \sigma$. Pelo Teorema da Correção, $\Gamma, \varphi \models \psi$. Mostremos que $\Gamma \models \varphi \to \sigma$. Para tal, consideremos uma valoração v tal que v sat. Γ. Pretendemos mostrar que $v(\varphi \to \sigma) = 1$. Como $\models \psi \to \sigma$, sabemos que $v(\psi \to \sigma) = 1$. Temos dois casos possíveis:

(a) CASO $v(\varphi) = 1$

(b) CASO $v(\varphi) = 0$

(a) CASO $v(\varphi) = 1$:

Se $v(\varphi) = 1$, como v sat. Γ, então v sat. $\Gamma \cup \{\varphi\}$. De $\Gamma, \varphi \models \psi$, segue-se que $v(\psi) = 1$. Atendendo a que $v(\psi \to \sigma) = 1$, podemos concluir que $v(\sigma) = 1$. Assim, $v(\varphi) = v(\sigma) = 1$ e, por conseguinte, $v(\varphi \to \sigma) = 1$.

(b) CASO $v(\varphi) = 0$.

Neste caso é imediato que $v(\varphi \to \sigma) = 1$.

Provámos, em ambos os casos, que $v(\varphi \to \sigma) = 1$. Logo, se v sat. Γ então $v(\varphi \to \sigma) = 1$, para toda a valoração v. Portanto, $\Gamma \models \varphi \to \sigma$.

Pelo Teorema da Completude segue-se que $\Gamma \vdash \varphi \to \sigma$.]

Grupo $\underline{\text{III}}$

1. Obs: $\mathcal{T}_L$ é definido indutivamente sobre $(\mathcal{A}_L)^*$ por:

i) $x_i \in \mathcal{T}_L$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$,

ii) $1 \in \mathcal{T}_L$

iii) $t \in \mathcal{T}_L \Rightarrow d(t) \in \mathcal{T}_L$, para todo $t \in (\mathcal{A}_L)^*$

iii) $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L \Rightarrow t_1 \times t_2 \in \mathcal{T}_L$, para todo $t_1, t_2 \in (\mathcal{A}_L)^*$

Um possível exemplo pode ser $d(d(1))$

2. $\quad (d(x_0) \times 1)\,[t/x_0] = d(t) \times 1$

Assim, para x_1 e x_2 ocorrerem em $d(t) \times 1$, x_1 e x_2 têm de ocorrer em t.

Consideremos, por exemplo, $t = x_1 \times x_2$.

3. $f : T_L \to \mathbb{N}_0$ é definida, por recursão estrutural sobre T_L, do seguinte modo:

(i) $f(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;
(ii) $f(1) = 0$;
(iii) $f(d(t)) = 1 + f(t)$, para todo $t \in T_L$;
(iv) $f(t_1 \times t_2) = 1 + f(t_1) + f(t_2)$, para todo $t_1, t_2 \in T_L$.

4.

$$\overline{d(d(x_1) \times x_2)}\,\alpha = \bar{d}\left(\bar{\times}\left(\bar{d}(\alpha(x_1)), \alpha(x_2)\right)\right)$$

$$= 2 \times \left((2 \times 3) \times 6\right) = 72.$$

$\alpha(x_1) = 3$
$\alpha(x_2) = 6$

5.

$\overline{\varphi}\,\alpha = 1$ sse $\overline{P(x_1 \times x_2)}\,\alpha = 0$

sse $\overline{x_1 \times x_2}\,\alpha \notin \overline{P}$

sse $\alpha(x_1) \times \alpha(x_2)$ não é par

sse $5 \times \alpha(x_2)$ não é par

sse $\alpha(x_2)$ não é par

Logo, uma condição que α tem de satisfazer é: $\alpha(x_2)$ é ímpar.

6.

(a) Seja α uma atribuição em $\mathcal{E}$

$\overline{\varphi}\alpha = 1$ sse Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{(d(x_1) > x_1 \times x_1)}\ \alpha\binom{d}{x_1} = 1$

sse Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2n > n^2$, o que é verdade (basta considerar $n = 1$)

Logo, $\overline{\varphi}\alpha = 1$, para toda a atribuição α em $\mathcal{E}$. Assim, φ é verdadeira em $\mathcal{E}$.

(b) Seja $\mathcal{E}' = (\mathbb{N}, \sim)$ uma estrutura que difere de $\mathcal{E}$ apenas na interpretação de d.

Seja α uma atribuição em $\mathcal{E}'$

$\overline{\varphi}\alpha = 0$ sse Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{d}(n) \not> n^2$.

Consideremos, por exemplo, $\tilde{d} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.
$\qquad n \longmapsto n$

Como, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n^2$, segue-se que $\overline{\varphi}\alpha = 0$.