Lógica EI

2.º teste

29. maio. 2019

## Grupo I

1. $\mathrm{LIV}(P(t)) = \emptyset$ — isso implica que $\mathrm{VAR}(t) = \emptyset$, uma vez que na L-fórmula $P(t)$ não há ocorrências de quantificadores, para todo o L-termo $t$.

$\mathrm{VAR}(t) = \emptyset$ — podemos concluir que há pelo menos uma ocorrência de uma constante em $t$.

Portanto, L tem pelo menos uma constante.

A afirmação é V.

2. $(\forall x_0 \; x_0 < x_1)[x_1/x_0] = \forall x_0 \; x_0 < x_1$, uma vez que a ocorrência de $x_0$ em $\forall x_0 \; x_0 < x_1$ é ligada. A afirmação é F.

3. Uma L-estrutura com domínio D e função interpretação — é tal que a interpretação de cada uma das constantes é um elemento de D.

Assim, para a interpretação de cada uma das constantes escolhemos um elemento de D. Se D for um conjunto com $n$ elementos, teremos $n$ escolhas possíveis para a interpretação de cada constante. Existirão, portanto, $n^2$ L-estruturas com esse domínio D. Ora, se $n=12$, $n^2=144$.

Bastará assim considerar $D = \{1,2,3,4,\ldots,12\}$.

A afirmação é V.

4.

Admitamos que $L$ é um tipo de linguagem e $\varphi$ é uma $L$-fórmula universalmente válida.

Suponhamos que $\{\neg\varphi\}$ é consistente. Então, existem uma $L$-estrutura $E$ e uma atribuição $a$ em $E$ tais que $E \models \neg\varphi[a]$, ou seja, tal que $\neg\varphi[a]_E = 1$. Assim, $\varphi[a]_E = 0$, o que contraria o facto de $\varphi$ ser universalmente válida. Portanto, $\{\neg\varphi\}$ é inconsistente e a afirmação é V.

5.

Sejam $E = (D, \bar{\ })$ uma $L$-estrutura (onde $L$ é um tipo de linguagem com símbolos de relação unários $R$ e $Q$) e $a$ uma atribuição em $E$.

Se $E \models \forall x_0 (R(x_0) \vee Q(x_0)) [a]$, então, para todo $d \in D$,

$d \in \bar{R}$ ou $d \in \bar{Q}$.

Se $E \models \exists x_1 (\neg R(x_1) \wedge \neg Q(x_1)) [a]$, então existe pelo menos um $d' \in D$ t.q. $d' \notin \bar{R}$ e $d' \notin \bar{Q}$.

Claramente não podemos ter, simultaneamente,

$$E \models \forall x_0 (R(x_0) \vee Q(x_0)) [a]$$

e

$$E \models \exists x_1 (\neg R(x_1) \wedge \neg Q(x_1)) [a].$$

Portanto, a afirmação é V.

6.

Sejam $\varphi = p_0$, $\psi = p_1$ e $\sigma = p_2$. Temos que

$$p_0 \vee p_1, \; p_1 \vee p_2 \not\models p_0 \vee p_2$$

De facto, para $v : \mathcal{V}^{CP} \to \{0,1\}$ dada por $v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ ímpar} \\ 0 & \text{se } i \text{ par} \end{cases}$, temos que $v(p_0 \vee p_1) = v(p_1 \vee p_2) = 1$ mas $v(p_0 \vee p_2) = 0$.

Pelo Teorema da Correção, $p_0 \vee p_1, p_1 \vee p_2 \nvdash p_0 \vee p_2$.

A afirmação é F.

Grupo II

1.

$t = s(s(0))$

$subt(t) = \{0, s(0), s(s(0))\}$

2. $a(x_i) = i+2$

$\overline{0} = 0$

$\overline{s} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad \overline{s}(z) = -z$

$\overline{+} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \quad \overline{+}(z_1, z_2) = z_1 + z_2$

$$\begin{aligned} s(x_1 + s(x_3+0))[a] &= \overline{s}\left(\overline{+}\left(a(x_1), \overline{s}\left(\overline{+}(a(x_3), \overline{0})\right)\right)\right) \\ &= \overline{s}\left(a(x_1) + \overline{s}(a(x_3)+0)\right) \\ &= \overline{s}\left(a(x_1) + \overline{s}(a(x_3))\right) \\ &= \overline{s}(3 + \overline{s}(5)) \\ &= \overline{s}(3-5) = \overline{s}(-2) = 2 \end{aligned}$$

3.

$\forall x_0 \, (x_0 + s(x_0) = 0)$

4.

$(\neg \exists_1 \, s(x_1) = 0) \wedge (\exists x_2 \, P(x_2))$

$\Leftrightarrow (\forall x_1 \, \neg s(x_1) = 0) \wedge (\exists x_2 \, P(x_2))$

$\underset{x_1 \notin Liv(\exists x_2 P(x_2))}{\Longleftrightarrow} \forall x_1 \, (\neg s(x_1) = 0 \wedge \exists x_2 \, P(x_2))$

$\underset{x_2 \notin Liv(\neg s(x_1) = 0)}{\Leftrightarrow} \forall x_1 \exists x_2 \, (\neg s(x_1) = 0 \wedge P(x_2))$, que está em forma normal prenexa

Grupo III

1.

$$D: \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_2}^{(2)}}{p_2 \vee p_1}\vee_1 I \qquad \dfrac{\cancel{p_2 \vee p_1}^{(2)} \quad \cancel{p_2}^{(3)} \quad \dfrac{\dfrac{\cancel{p_1}^{(3)} \quad \cancel{\neg p_1}^{(1)}}{\bot}\neg E}{p_2}\bot E}{p_2}\vee E^{(3)}}{p_2 \leftrightarrow (p_2 \vee p_1)}\leftrightarrow I^{(2)}}{\neg p_1 \to (p_2 \leftrightarrow (p_2 \vee p_1))}\to I^{(1)}$$

$D$ é uma derivação em DNP de conclusão $\neg p_1 \to (p_2 \leftrightarrow (p_2 \vee p_1))$ t.q. $H(D) = \emptyset$, o que mostra que $\neg p_1 \to (p_2 \leftrightarrow (p_2 \vee p_1))$ é um teorema de DNP.

2. Admitamos que $\Gamma \vdash \varphi$ e que $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Então, existem uma derivação $D_1$ de conclusão $\varphi$ tal que $H(D_1) \subseteq \Gamma$ e uma derivação $D_2$ de conclusão $\neg\varphi$ tal que $H(D_2) \subseteq \Gamma$.

Assim,

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \varphi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \neg\varphi \end{matrix}}{\bot}\neg E$$

é uma derivação de conclusão $\bot$ cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $H(D_1) \cup H(D_2)$, que é um subconjunto de $\Gamma$, o que mostra que $\Gamma \vdash \bot$. Logo, $\Gamma$ é sintaticamente inconsistente.

3. $\psi: \; P(x_2) \to \forall x_1 \; P(x_1 + x_2)$

(a) $x_2$ tem duas ocorrências livres em $\psi$. Apenas a segunda está no alcance de um quantificador, que é $\forall x_1$. Como $x_1 \notin VAR(s(0))$, $x_2$ está livre para $s(0)$ em $\psi$.

(b) A única variável que tem ocorrências livres em $\psi$ é $x_2$.

Portanto, toda a variável $x \in \mathcal{V} \setminus \{x_2\}$ está livre para $x_1 + x_2$ em $\psi$.

A segunda ocorrência livre de $x_2$ em $\psi$ está no alcance de $\forall x_1$ e $x_1 \in VAR(x_1 + x_2)$. Portanto, $x_2$ não está livre para $x_1 + x_2$ em $\psi$.

Logo, as variáveis que estão livres para $x_1 + x_2$ em $\psi$ são as variáveis $x_i$, com $i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2\}$.

4.

(a) $\varphi = \forall x_0 \left(\neg P(x_0) \to (x_0 = 0 \vee P(s(x_0)))\right)$

Seja a uma atribuição em E.

$\varphi[a]_E = 1$ sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, se $\neg P(x_0)\, [a\binom{x_0}{d}]_E = 1$ então $(x_0 = 0 \vee P(s(x_0)))\, [a\binom{x_0}{d}]_E = 1$

sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, se $d \notin \overline{P}$, então $d = 0$ ou $-d \in \overline{P}$

sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, se $d \leq 0$, então $d = 0$ ou $-d > 0$, o que é verdade.

Logo, $\varphi[a]_E = 1$

Assim, $\varphi$ é válida em E.

(b) Consideremos a L-estrutura $E' = (\mathbb{Z}, \sim)$ exatamente igual a E exceto na interpretação de s que é $\tilde{s}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $m \mapsto m+1$.

Dada uma atribuição a em E, temos que

$\varphi[a]_{E'} = 1$

sse para todo $d \in \mathbb{Z}$, se $d \leq 0$, então $d = 0$ ou $d + 1 > 0$, o que é falso. Portanto, $\varphi[a]_{E'} = 0$ e $\varphi$ não é universalmente válida.

5.

Admitamos que $E$ é uma L-estrutura e $a$ uma atribuição em $E$ tais que $E \models \forall x\,(\varphi \vee \psi)\,[a]$.

Sabemos que

$$\forall x\,(\varphi \vee \psi) \underset{\text{v comutativa}}{\Leftrightarrow} \forall x\,(\psi \vee \varphi)$$

$$\underset{x \notin Liv(\varphi)}{\Longleftrightarrow} (\forall x\,\psi) \vee \varphi$$

$$\underset{\text{v comutativa}}{\Longleftrightarrow} \varphi \vee (\forall x\,\psi)$$

Logo, $E \models \varphi \vee (\forall x\,\psi)\,[a]$.

Podemos, então, concluir que $\forall x\,(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \forall x\,\psi$