Universidade do Minho
Dep. Matemática

MiEInf
2020/2021

Lógica EI

Teste — 28 de maio de 2021 — duração: 2 horas

nome: ______________________ número: __________

Grupo I

Responda a cada uma das 8 questões deste grupo no enunciado, no espaço disponibilizado a seguir à questão, **sem apresentar justificações**.

1. Dê exemplo de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional tal que $subf(\varphi)$ tem quatro elementos e $var(\varphi) = \{p_0\}$.

   Resposta:

2. Seja $\Gamma = \{p_1 \wedge \neg p_0, p_2 \to p_0\}$. Dê exemplo de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional tal que φ não é contradição e $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é um conjunto inconsistente.

   Resposta:

3. Seja $\Gamma = \{p_1 \wedge \neg p_0, p_2 \to p_0\}$. Dê exemplo de uma valoração v tal que v satisfaz Γ.

   Resposta:

4. Considere a fórmula $\varphi = p_0 \to \neg(p_1 \vee \neg p_2)$. Dê exemplo de uma fórmula ψ do Cálculo Proposicional tal que $\psi \Leftrightarrow \varphi$ e cujos conetivos estão no conjunto $\{\neg, \wedge\}$.

   Resposta:

Nas restantes questões deste grupo, considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{s}, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{P}\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{s}) = 1$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 2$ e $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$, e considere a L-estrutura $E = (\mathbb{N}, \overline{})$ tal que:

$$\overline{\mathsf{c}} = 1 \qquad \overline{\mathsf{f}} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \text{ tal que } \overline{\mathsf{f}}(m,n) = m + 2n$$
$$\overline{\mathsf{s}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ tal que } \overline{\mathsf{s}}(n) = n + 1 \qquad \overline{\mathsf{P}} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\}$$

5. Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = 2i$. Indique o valor de: $\mathsf{f}(\mathsf{f}(x_1, \mathsf{c}), \mathsf{s}(x_2))\,[a]_E$.

   Resposta:

6. Indique uma fórmula de tipo L válida em E que represente a afirmação: Para qualquer número par o seu sucessor é um número ímpar.

   Resposta:

7. Seja φ a L-fórmula: $\forall x_0\, \mathsf{P}(\mathsf{f}(x_0, x_1)) \to \forall x_1\, \neg \mathsf{P}(\mathsf{f}(x_1, x_0))$. Calcule $\varphi[s(x_1)/x_0]$.

   Resposta:

8. Seja φ a L-fórmula: $\forall x_0\, \mathsf{P}(\mathsf{f}(x_0, x_1)) \to \forall x_1\, \neg \mathsf{P}(\mathsf{f}(x_1, x_0))$. Indique um L-termo t tal que x_1 não está livre para t em φ.

   Resposta:

Grupo II

Responda às 6 questões deste grupo na folha de exame, **justificando** convenientemente as respostas.

1. Seja ψ uma fórmula proposicional tal que $var(\psi) = \{p_0\}$. Prove por indução estrutural que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $var(\varphi) = var(\varphi[\psi/p_0])$.

2. Indique uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente à fórmula $(p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_3 \vee \perp)$. (Justifique.)

3. Diga se: $p_1 \wedge (p_2 \vee p_3), p_1 \to \neg p_2 \models p_3$. (Justifique.)

4. Seja $\varphi = p_0 \to (p_1 \to p_2)$.

   (a) Construa uma demonstração em DNP da fórmula $\varphi \to ((p_0 \wedge p_1) \to p_2)$.

   (b) Mostre que $\{\varphi, p_0, p_1 \wedge \neg p_2\}$ é sintaticamente inconsistente.

5. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{s}, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{P}\}, \mathcal{N})$ e a L-estrutura $E = (\mathbb{N}, \overline{\ })$ do Grupo I. Seja φ a L-fórmula: $\mathsf{P}(x_1) \to \forall x_0\, \mathsf{P}(\mathsf{f}(x_1, x_0))$.

   (a) Prove que φ é válida em E.

   (b) Mostre que φ não é universalmente válida.

6. Sejam L um tipo de linguagem, φ e ψ fórmulas de tipo L e x uma variável tal que $x \notin LIV(\varphi)$. Prove que: $\forall x(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \models \forall x\psi$.

Cotações	II (8 valores)	II (12 valores)
	1+1+1+1+1+1+1+1	1,75+1,75+1,75+3,25+2,5+1