Grupo I

1. $g \in \mathcal{F}$ $\mathcal{N}(g) = 2$

$$g(x_1, g(x_1, x_2))\,[t_1/x_1] = g(x_0, x_1)\,[t_2/x_2]$$

sse $g(t_1, g(t_1, x_2)) = g(x_0, t_2)$

tomemos $t_1 = x_0$

e $t_2 = g(x_0, x_2)$

2.

$\varphi = \forall x_0\, R(x_0, x_1) \wedge R(x_0, x_1)$

$subf(\varphi) = \{ R(x_0,x_1),\ \forall x_0\, R(x_0,x_1),\ \varphi \}$

$Liv(\varphi) = \{x_0, x_1\}$

$Lig(\varphi) = \{x_0\}$.

3. $\varphi[s(x_0)/x_0] = \exists x_0\, (x_0 = x_1) \wedge \neg (s(x_0) = x_1)$

4. $f(g(x_1, f(c)))[a]_E = \overline{f}\,(\overline{g}\,(a(x_1), \overline{f}\,(\overline{c})))$

$= \overline{f}\,(\overline{g}\,(1-2, 2^2)) = \overline{f}\,(3 \times (1-2) + 2^2)$

$= \overline{f}\,(1) = 1^2 = 1$

5.

$\forall x_0\, R(x_0, c)\,[a']_E = 0$, para ~~qq~~ atribuição a' em E.

De facto,

$\forall x_0\, R(x_0, c)\,[a']_E = 1$ sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, d e 2 têm o mesmo resto na divisão inteira por 3

sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, o resto da divisão inteira de d por 3 é 2, o que é falso.

Logo, $\forall x_0\, R(x_0, c)\,[a']_E = 0$,

Assim, para que $P(f(x_0)) \rightarrow \forall x_0\, R(x_0, c)\,[a']_E = 0$, é necessário que $\quad P(f(x_0))[a']_E = 1$, ou seja, que

$$\bar{f}(a'(x_0)) \in \bar{P}.$$

Ora, $\quad \bar{f}(a'(x_0)) \in \bar{P}$ sse $\quad a'(x_0)^2$ é divisível por 6.

Consideremos, então, a' dada por

$$a'(x_i) = i + 6,$$

para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Temos que $\quad a'(x_0)^2 = 6^2 = 36$, que é divisível por 6.

6. $\quad \forall x_0 \; \neg R(x_0, c)$

7. $\quad E = (\{1,2\}, {}^-)$ onde $\bar{c} = 1$ e $\bar{P} = \{2\}$.

Temos que, para toda a atribuição a em E,

$E \models \exists x_0 P(x_0)[a]$ sse Existe $d \in \{1,2\}$ tal que $d \in \bar{P}$, o que é verdade (basta tomar $d=2$)

e

$E \models \neg P(c)[a]$ sse $\bar{c} \notin \bar{P}$
sse $1 \notin \{2\}$, o que é verdade.

Portanto, para toda a atribuição a em E, $E \models \exists x_0 P(x_0)[a]$ e $E \models \neg P(c)[a]$. Logo, E é um modelo de $\{\exists x_0 P(x_0), \neg P(c)\}$.

8. $\quad \varphi = R(c, x_0)$

Sejam $E = (\{1,2\}, {}^-)$, onde $\bar{c} = 1$ e $\bar{R} = \{(1,1),(2,2)\}$, e $a : V \to \{1,2\}$ a atribuição em E dada por $a(x_i) = 2$.

Temos que

$E \models \forall x_0\, R(x_0,x_0)[a]$ sse $\forall x_0\, R(x_0,x_0)\,[a]_E = 1$

sse Para todo $d \in \{1,2\}$, $R(x_0,x_0)\left[a\binom{x_0}{d}\right]_E = 1$

sse Para todo $d\in\{1,2\}$, $(d,d)\in \overline{R}$, o que é verdade, uma vez que $\overline{R} = \{(1,1),(2,2)\}$

Logo, $E \models \forall x_0\, R(x_0,x_0)\,[a]$.

No entanto, $R(c,x_0)\,[a] = 0$, uma vez que $(\overline{c}, a(x_0)) =$

$=(1,2) \notin \overline{R}$.

Portanto, $\forall x_0\, R(x_0,x_0) \not\models R(c,x_0)$ e, por conseguinte, $\forall x_0\, R(x_0,x_0) \nvdash R(c,x_0)$.

Grupo II

1.

$$D: \dfrac{\dfrac{p_0 \wedge p_1}{p_0}\,{\scriptstyle 1,E} \qquad p_0 \to \bot}{\bot}\,{\scriptstyle \to E}$$

é uma derivação em DNP de conclusão $\bot$ tal que $H(D) = \{p_0 \wedge p_1, p_0 \to \bot\}$. Logo, $\Gamma \vdash \bot$ e, portanto, Γ é sintaticamente inconsistente.

2. Admitamos que $\Gamma \models \varphi$ e que Γ é sintaticamente consistente. Então, Γ é semanticamente consistente. Existe, portanto, pelo menos uma valoração v que satisfaz Γ. Como $\Gamma \models \varphi$, dado que $v \models \Gamma$, segue-se que $v(\varphi)=1$. Logo, $v(\neg\varphi)=0$. Assim, v é uma valoração que satisfaz Γ mas não satisfaz $\neg\varphi$, pelo que $\Gamma \not\models \neg\varphi$. Pelo Teorema da Correção, $\Gamma \nvdash \neg\varphi$.

3. $\varphi: \neg P(x_0) \to \exists x_1\, R(g(x_0,x_1), c)$

a segunda ocorrência de x_0 é livre e está no alcance de $\exists x_1$. Logo, x_0 não está livre para t em φ se $x_1 \in VAR(t)$

Portanto, não é verdade que qualquer variável está livre para qualquer L-termo t em φ.

4. $\varphi: \forall x_1 \, (P(x_1) \to P(g(c, x_1)))$

(a) Seja a uma atribuição em $\mathcal{E}$.

Temos que

$\varphi[a]_{\mathcal{E}} = 1$ sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, $P(x_1) \to P(g(c, x_1)) \left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, se $d \in \overline{P}$ então $\overline{g}(\overline{c}, d) \in \overline{P}$

sse Para todo $d \in \mathbb{Z}$, se d é divisível por 6, então $3 \times 2 + d$ é divisível por 6, o que é verdade

Logo, $\varphi[a]_{\mathcal{E}} = 1$.

Portanto, φ é válida em $\mathcal{E}$.

(b) Consideremos a atribuição $\mathcal{E}' = (\mathbb{Z}, \sim)$ exatamente igual a $\mathcal{E}$ exceto na interpretação de c que é $\tilde{c} = 1$.

Temos que para $d = 6 \in \mathbb{Z}$, d é divisível por 6 mas $3 \times 1 + 6 = 9$ não é divisível por 6. Logo, $\varphi[a]_{\mathcal{E}'} = 0$, para toda a atribuição a em $\mathcal{E}'$

Portanto, φ não é universalmente válida.

5. Sejam $\mathcal{E}$ uma L-estrutura e a uma atribuição em $\mathcal{E}$ tais que

$$\mathcal{E} \models \varphi[a].$$

i.e., $\varphi[a]_{\mathcal{E}} = 1$. Sabemos que $(\varphi \to \psi)[a'] = 1$, para toda a atribuição a' em $\mathcal{E}$.

$$\varphi \to \forall x \psi \iff \neg\varphi \vee \forall x \psi \overset{x \notin Liv(\varphi)}{\iff} \forall x \, (\neg\varphi \vee \psi)$$
$$\iff \forall x \, (\varphi \to \psi)$$

$\forall x \, (\varphi \to \psi)[a]_{\mathcal{E}} = 1$ sse Para todo $d \in dom(\mathcal{E})$ $(\varphi \to \psi)\left[a\binom{x}{d}\right] = 1$

o que é verdade pois $\varphi \to \psi$ é universalmente válida.

Portanto, $\varphi \to \forall x \psi \, [a]_{\mathcal{E}} = 1$. Portanto, $\forall x \psi \, [a]_{\mathcal{E}} = 1$

Assim, $\varphi \models \forall x \psi$

6.

$$
\mathcal{D}: \quad
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \cancel{P(c)}^{(1)} \qquad
      \dfrac{\forall x_0 \, (P(x_0) \to Q(f(x_0)))}{P(c) \to Q(f(c))}\ \forall E \ (**)
    }{Q(f(c))}\ \to E
  }{\exists x_1 \, Q(x_1)}\ \exists I \ (*)
}{P(c) \to \exists x_1 \, Q(x_1)}\ \to I^{(1)}
$$

(**) x_0 está livre para c em $P(x_0) \to Q(f(x_0))$;

(*) x_1 está livre para $f(c)$ em $Q(x_1)$.

$\mathcal{D}$ é uma derivação em DN de conclusão $P(c) \to \exists x_1 \, Q(x_1)$ tal que $\mathcal{H}(\mathcal{D}) = \{ \forall x_0 \, (P(x_0) \to Q(f(x_0)))$, o que mostra que $\forall x_0 \, (P(x_0) \to Q(f(x_0))) \vdash P(c) \to \exists x_1 \, Q(x_1)$.