2º Teste de Lógica

Licenciatura/Mestrado Integrado em Engenharia Informática

25 de maio de 2023 Duração: **2h**

Nome : ______________________ Nº ________ Curso ________

1. Considere o tipo de linguagem $L_A = (\{0, s, +\}, \{<, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, e $\mathcal{N}(+) = \mathcal{N}(<) = \mathcal{N}(=) = 2$.

   Seja $E_A = (\mathbb{Z}, \bar{\ })$ uma L_A-estrutura em que: $\overline{0} = 1$, $\overline{s}(z) = z^2$, $\overline{+}$ é a operação adição de inteiros, $\overline{=}$ é a relação de igualdade, e $\overline{<}$ é a relação menor usual em $\mathbb{Z}$.

   Na estrutura E_A, considere a atribuição
   $$a : \mathcal{V} \to \mathbb{Z}$$
   $$x_i \mapsto \begin{cases} i & \text{se } i \text{ é par} \\ -i & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases}$$

   Responda a cada uma das seguintes 5 questões, sem apresentar justificação.

   (a) Indique o alcance do quantificador $\exists_{x_1}$ na L_A-fórmula
   $$\forall_{x_0}\forall_{x_1}\big((s(x_0) + 0 < x_1) \vee \big(\exists_{x_1}(x_1 = s(x_2)) \to (x_1 + x_2 = s(0))\big) \vee (x_1 = x_2)\big).$$

   O alcance de $\exists x_1$ é $x_1 = s(x_2)$.

   (b) Indique o valor de $(s(x_2) + (x_0 + s(x_1)))[a]_{E_A}$.

   5

   (c) Indique o valor de $\big(\forall_{x_2}(x_2 < s(x_2) + s(x_1)) \to \neg(x_2 = 0)\big)[a]_{E_A}$.

   1

   (d) Considere o conjunto de L_A-fórmulas $\Gamma = \big\{\exists_{x_0}(x_1 = s(x_1) + x_0),\ 0 < s(x_0)\big\}$. Indique uma realização (E', a') de Γ.

   → $E' = (\mathbb{Z}, \bar{\ })$ em que: • $\bar{0} = 0$, $\bar{s} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n+1$, $\bar{+} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(a,b) \mapsto a+b$
   • $\bar{<}$ é a relaç menor e $\bar{=}$ é a relaç igualdade em $\mathbb{Z}$.

   → $a' : \mathcal{V} \to \mathbb{Z}$
   $x_i \mapsto i \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$

   (e) Seja Δ um conjunto de L_A-fórmulas tal que $\Delta \cup \{\exists_{x_0}(x_1 < s(x_0))\}$ e $\Delta \cup \{\forall_{x_0}\neg(x_1 < s(x_0))\}$ são inconsistentes. Diga se existe um conjunto consistente Δ nestas condições. Em caso afirmativo, indique Δ.

   Não existe.

Cada resposta certa vale **1** *; cada resposta em branco ou errada vale* **0**.

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\varnothing, \cup, \cap\}, \{=, \subseteq\}, \mathcal{N})$ em que a funçãon aridade $\mathcal{N}$ é definida por: $\mathcal{N}(\varnothing) = 0$, $\mathcal{N}(\cup) = \mathcal{N}(\cap) = \mathcal{N}(=) = \mathcal{N}(\subseteq) = 2$.

Seja $E = (\mathcal{P}(\mathbb{N}),\ ^{-})$ a L-estrutura definida por:

- $\overline{\varnothing}$ é o conjunto vazio;
- $\overline{\cap}$ é a operação interseção de conjuntos;
- $\overline{=}$ é a relação igualdade de conjuntos;
- $\overline{\cup}$ é a operação união de conjuntos;
- $\overline{\subseteq}$ é a relação inclusão de conjuntos.

Sem justificar, diga se é verdadeira (V) ou se é falsa (F) cada uma das seguintes afirmações:

(a) O conjunto $\{x_0 \cup x_1,\ \varnothing \subseteq x_1\}$ é um conjunto de L-termos. $\boxed{F}$

(b) Sendo $t = (x_1 \cup x_2) \cap x_1$ e $t_1 = t_2 = (x_1 \cap x_2)$, então $t\,[t_1/x_1]\,[t_2/x_2] = t\,[t_2/x_2]\,[t_1/x_1]$. $\boxed{F}$

(c) Dada a L- fórmula $\exists_{x_0} \forall_{x_1} (x_0 \cap x_1 = x_1) \to \forall_{x_2} (\ x_2 \subseteq x_0 \cap x_1)$, o conjunto das váriáveis livres é $\{x_0, x_1\}$ e o conjunto das variáveis ligadas é $\{x_0, x_1, x_2\}$. $\boxed{V}$

(d) A variável x_1 está livre para o L-termo $x_0 \cup x_1$ na L-fórmula

$$\forall_{x_0} (\exists_{x_1} (x_0 \cap x_1 = x_1) \to \forall_{x_2}\ x_2 \subseteq x_1).$$ $\boxed{F}$

(e) $(\exists_{x_0}\ x_0 \subseteq x_1 \to x_0 \subseteq \varnothing)\,[x_2 \cap x_3/x_0] = \exists_{x_0}\ x_0 \subseteq x_1 \to x_2 \cap x_3 \subseteq \varnothing$. $\boxed{V}$

(f) A L- fórmula seguinte é uma instância de uma tautologia:

$$\exists_{x_0} (x_1 \cup x_0 = \varnothing) \to \big(\neg(x_0 = x_1) \to \exists_{x_0} (x_1 \cup x_0 = \varnothing)\big).$$ $\boxed{V}$

(g) Sendo $a : \mathcal{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $a(x_i) = \{i+1, i+2, i+3\}$ para qualquer $i \in \mathbb{N}_0$,

$$((x_0 \cup x_1) \cap x_2)\,[a]_E = \{2, 3, 4\}.$$ $\boxed{F}$

(h) $E \models \forall_{x_1} \exists_{x_2} (x_1 \cap x_2 = x_2 \land \neg(x_2 = \varnothing))$. $\boxed{F}$

(i) Na árvore seguinte a conclusão final resulta da aplicação correta da regra de inferência $\exists E$.

$$\dfrac{\exists_{x_1} (x_1 \cap x_2 = \varnothing) \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{x_1 \cap x_2 = \varnothing}}{x_1 = \varnothing \to x_1 \cap x_2 = \varnothing}\to I}{\forall_{x_2} ((x_1 = \varnothing) \to (x_1 \cap x_2 = \varnothing))}\forall I}{\forall_{x_2} ((x_1 = \varnothing) \to (x_1 \cap x_2 = \varnothing))}\ .$$ $\boxed{F}$

(j) $\vdash \forall_{x_1}\ (x_1 \subseteq x_2 \lor x_1 \subseteq x_3) \to (\forall_{x_1}\ x_1 \subseteq x_2 \lor \forall_{x_1}\ x_1 \subseteq x_3)$. $\boxed{F}$

Cada resposta certa vale **0.5** ; *cada resposta errada vale* **-0.2**; *cada resposta em branco vale* **0**.

3. Seja L um tipo de linguagem e sejam φ, ψ e σ L-fórmulas. Seja x uma variável. Justificando cuidadosamente, mostre que:

(a) $\models \exists_x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi)$;

$\exists x(\varphi\wedge\psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$ é universalmente válida se para qualquer L-estrutura $E=(D,\bar{\ })$ e qualquer atribuição a $\exists x(\varphi\wedge\psi)\to(\exists x\varphi\wedge\exists x\psi)[a]_E=1$
Vamos verificar esta última igualdade.

$(\exists x(\varphi\wedge\psi)\to(\exists x\varphi\wedge\exists x\psi))[a]_E=1$ sse $\exists x(\varphi\wedge\psi)[a]=0$ ou $(\exists x\varphi\wedge\exists x\psi)[a]=1$

sse para todo o $d\in D$ $(\varphi\wedge\psi)[a(\tfrac{x}{d})]=0$ ou $\exists x\varphi[a]=1$ e $\exists x\psi[a]=1$

sse para todo o $d\in D$ $\varphi[a(\tfrac{x}{d})]=0$ ou $\psi[a(\tfrac{x}{d})]=0$, ou existe $d'\in D$ tal que $\varphi[a(\tfrac{x}{d'})]=1$ e existe $d''\in D$ tal que $\psi[a(\tfrac{x}{d''})]=1$

Se para todo o $d\in D$ $\varphi[a(\tfrac{x}{d})]=0$ ou $\psi[a(\tfrac{x}{d})]=0$, então a afirmação é verdadeira. Caso contrário, existe $d\in D$ tal que $\varphi[a(\tfrac{x}{d})]=\psi[a(\tfrac{x}{d})]=1$. Logo, fazendo $d'=d''=d$, a afirmação é verdadeira.

(b) $\forall_x\neg(\varphi \wedge \psi),\ \exists_x(\sigma \wedge \varphi) \models \exists_x\neg(\sigma \to \psi)$.

$\exists x\,\neg(\sigma\to\psi)$ é consequência semântica de $\{\forall x\,\neg(\varphi\wedge\psi),\ \exists x(\sigma\wedge\varphi)\}$ sse para qualquer L-estrutura $E=(D,\bar{\ })$ e atribuição a se $\forall x\,\neg(\varphi\wedge\psi)[a]=1^{(1)}$ e $\exists x(\sigma\wedge\varphi)[a]=1^{(2)}$, então $\exists x\,\neg(\sigma\to\psi)[a]=1$.

Seja (E,a) tal que a hipótese (1) e (2) se verifica.
Então para todo o $d\in D$, $(\varphi\wedge\psi)[a(\tfrac{x}{d})]=0$ e existe $d'\in D$ tal que $(\sigma\wedge\varphi)[a(\tfrac{x}{d'})]=1$, ou seja,
para todo o $d\in D$ $\varphi[a(\tfrac{x}{d})]=0$ ou $\psi[a(\tfrac{x}{d})]=0$ e existe $d'\in D$ tal que $\sigma[a(\tfrac{x}{d'})]=1$ e $\varphi[a(\tfrac{x}{d'})]=1$.

Como $\varphi[a(\tfrac{x}{d'})]=1$, então $\psi[a(\tfrac{x}{d'})]=0$. Assim, $(\sigma\to\psi)[a(\tfrac{x}{d'})]=0$. Consequentemente, existe $d'\in D$ tal que $\neg(\sigma\to\psi)[a(\tfrac{x}{d'})]=1$. Logo, $\exists x\,\neg(\sigma\to\psi)[a]=1$.

4. Seja $L = (\{z, s, +\}, \{\text{soma}\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(z) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$ e $\mathcal{N}(\text{soma}) = 3$.

(a) Considere a seguinte árvore de L-fórmulas. Verifique se é uma derivação de DN_L identificando cada uma das regras de inferência utilizadas, as hipóteses canceladas, e verificando as condições necessárias à aplicação de cada regra.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{(iv)}{\exists_{x_1}\forall_{x_2}\forall_{x_0}\text{soma}(s(x_2), x_0, x_1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(iv)}{\forall_{x_2}\forall_{x_0}\text{soma}(s(x_2), x_0, x_1)}}{\forall_{x_0}\text{soma}(s(z), x_0, x_1)}\boxed{\forall E\ (i)}}{\text{soma}(s(z), x_1, x_1)}\boxed{\forall E\ (ii)}}{\exists_{x_1}\text{soma}(s(z), x_1, x_1)}\boxed{\exists I\ (iii)}}{\exists_{x_1}\text{soma}(s(z), x_1, x_1)}\boxed{\exists E\ (iv)}}{\exists_{x_1}\forall_{x_2}\forall_{x_0}\text{soma}(s(x_2), x_0, x_1) \to \exists_{x_1}\text{soma}(s(z), x_1, x_1)}\boxed{\to I\ (v)}$$

(i) x_2 é livre para o termo z na L-fórmula $\forall x_0\, \text{soma}(s(x_2), x_0, x_1)$.

(ii) x_0 é livre para o termo x_1 na L-fórmula $\text{soma}(s(z), x_0, x_1)$.

(iii) x_1 é livre para o termo x_1 na L-fórmula $\text{soma}(s(z), x_1, x_1)$

(iv) x_1 não ocorre livre em $\exists x_1\, \text{soma}(s(z), x_1, x_1)$ e não há hipóteses não canceladas na derivação de $\exists x_1\, \text{soma}(s(z), x_1, x_1)$ diferentes de $\forall x_2 \forall x_0\, \text{soma}(s(x_2), x_0, x_1)$

(v) ______

(b) Seja $E = (\mathbb{N}_0, \bar{\ })$ a L-estrutura em que $\bar{z} = 0$, $\bar{s}$ e $\bar{+}$ são as funções de sucessor e adição em $\mathbb{N}_0$, respetivamente, e $\overline{\text{soma}}$ é a relação definida por $\overline{\text{soma}} = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}_0^3 : i + j = k\}$. Verifique se E é um modelo do seguinte conjunto de L-fórmulas:

$$\Gamma = \left\{ \forall_{x_0}\forall_{x_1}(\text{soma}(x_0, z, x_1) \to \text{soma}(s(x_0), z, s(x_1))), \quad \exists_{x_2}\text{soma}(z, x_2, s(z)) \right\}.$$

Justifique detalhadamente a sua resposta.

E é um modelo de Γ se, para toda a atribuição $a: V \to \mathbb{N}_0$

i) $E \models \forall x_0 \forall x_1 (\text{soma}(x_0, z, x_1) \to \text{soma}(s(x_0), z, s(x_1)))[a]$ e

ii) $E \models \exists x_2\, \text{soma}(z, x_2, s(z))[a]$.

i) $\forall x_0 \forall x_1 (\text{soma}(x_0, z, x_1) \to \text{soma}(s(x_0), z, s(x_1)))[a] = 1$ sse

para quaisquer $d_0, d_1 \in \mathbb{N}_0$ $(\text{soma}(x_0, z, x_1) \to \text{soma}(s(x_0), z, s(x_1)))\left[a\binom{x_0}{d_0}\binom{x_1}{d_1}\right] = 1$

sse para quaisquer $d_0, d_1 \in \mathbb{N}_0$ $\text{soma}(x_0, z, x_1)\left[a\binom{x_0}{d_0}\binom{x_1}{d_1}\right] = 0$ ou

$\text{soma}(s(x_0), z, s(x_1))\left[a\binom{x_0}{d_0}\binom{x_1}{d_1}\right] = 1$

sse para quaisquer $d_0, d_1 \in \mathbb{N}_0$ $(d_0, \bar{z}, d_1) \notin \overline{\text{soma}}$ ou $(\bar{s}(d_0), \bar{z}, \bar{s}(d_1)) \in \overline{\text{soma}}$

sse para quaisquer $d_0, d_1 \in \mathbb{N}_0$ $d_0 \neq d_1$ ou $d_0 + 1 = d_1 + 1$ (1)

ii) $\exists x_2\, \text{soma}(z, x_2, s(z))[a] = 1$ sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $\text{soma}(z, x_2, s(z))\left[a\binom{x_2}{d}\right] = 1$

sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $\bar{z} + d = \bar{s}(\bar{z})$ sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $d = 1$ (2)

Porque (1) e (2) são afirmações verdadeiras, conclui-se que E é um modelo de Γ!