Universidade do Minho
Escola de Engenharia

SOLUÇÕES DO CADERNO DE EXERCÍCIOS

Métodos Numéricos e Otimização Não Linear

Ano letivo de 2024/25

Métodos Numéricos

Sistemas de equações lineares

1. Um engenheiro supervisiona a produção de 3 marcas de automóveis. Para a sua produção, são necessários 3 tipos de materiais: metal, tecido e borracha. As quantidades para produzir um carro de cada marca são:

carro	metal(lb/carro)	tecido(lb/carro)	borracha(lb/carro)
1	1500	25	100
2	1700	33	120
3	1900	42	160

Estão disponíveis por dia, respetivamente 106000, 2170, 8200 lb de metal, tecido e borracha. Quantos automóveis podem ser produzidos por dia?

(a) Resolva o sistema por um método direto e estável (usando 4 casas decimais nos cálculos).

(b) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes.

Solução

(a) O sistema a resolver é dado por

$$\begin{cases} 1500x_1 + 1700x_2 + 1900x_3 = 106000 \\ 25x_1 + 33x_2 + 42x_3 = 2170 \\ 100x_1 + 120x_2 + 160x_3 = 8200 \end{cases}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1500.00000 & 1700.00000 & 1900.00000 \\ 0.00000 & 6.66667 & 33.33333 \\ 0.00000 & 0.00000 & -13.00000 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 106000.00000 \\ 1133.33333 \\ -390.00000 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

(b) det $= 130000$

Resolução em Matlab/Octave

```
A=[1500 1700 1900; 25 33 42; 100 120 160]
b=[106000; 2170; 8200]
x=A\b      %alinea a
det(A)     %alinea b
```

2. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.0x_3 &= 12.6 \\ 0.6x_1 + 0.9x_2 + 2.8x_3 &= 10.8 \\ 2.0x_1 + 1.0x_2 + 1.1x_3 &= 4.0 \end{cases}$$

   (a) Resolva-o usando um método direto e estável.

   (b) Calcule o seu determinante.

Solução

(a)

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 1.4 & 3.0 & | & 12.6 \\ 0.6 & 0.9 & 2.8 & | & 10.8 \\ 2.0 & 1.0 & 1.1 & | & 4.0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & 1.1 & | & 4.0 \\ 0.6 & 0.9 & 2.8 & | & 10.8 \\ 0.8 & 1.4 & 3.0 & | & 12.6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & 1.1 & | & 4.0 \\ 0 & 0.6 & 2.47 & | & 9.6 \\ 0 & 1.0 & 2.56 & | & 11 \end{bmatrix}$$

$1 \leftrightarrow 3$

$$m_{21} = \frac{-0.6}{2.0} = -0.3$$

$$m_{31} = \frac{-0.8}{2.0} = -0.4$$

$2 \leftrightarrow 3$

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & 1.1 & | & 4.0 \\ 0 & 1.0 & 2.56 & | & 11 \\ 0 & 0.6 & 2.47 & | & 9.6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & 1.1 & | & 4.0 \\ 0 & 1.0 & 2.56 & | & 11 \\ 0 & 0 & 0.934 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{-0.6}{1.0} = -0.6$$

$$\begin{cases} 2.0_1 + x_2 + 1.1x_3 &= 40 \\ x_2 + 2.56x_3 &= 11 \\ 0.934x_3 &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1.15525 \\ x_2 = 2.77730 \\ x_1 = 3.21199 \end{cases}$$

(b) $\det = (-1)^2 \times 2.0 \times 1 \times 0.934 = 1.868$

Resolução em Matlab/Octave

```
A=[0.8  1.4  3.0 ;0.6  0.9  2.8 ;2.0 1.0 1.1]
b=[12.6;10.8;4.0]
x=A\b
```

3. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 \\ 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 \end{pmatrix}$$

e o vetor $b = (14.6,\ -11.4,\ 14.0,\ -0.9)^T$.

   (a) Resolva o sistema correspondente por um método direto e estável.

(b) Calcule o determinante da matriz A por um método direto e estável.

(c) Calcule A^{-1} usando o método de eliminação de Gauss com pivotagem parcial.

Solução

(a) $x = (1, 2, -1, -0.5)^T$

(b) $\det(A) = -4.872$

(c)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3.009031 & -13.009031 & -13.222085 & 6.806240 \\ 0.726601 & -0.726601 & -1.185961 & 0.320197 \\ -0.049261 & 0.049261 & 0.029557 & 0.147783 \\ -2.142857 & 7.142857 & 7.785714 & -3.571429 \end{pmatrix}$$

Resolução em Matlab/Octave

```
A=[2.4 6.0 -2.7 5.0; -2.1 -2.7 5.9 -4.0; 3.0 5.0 -4.0 6.0;0.9 1.9 4.7 1.8]
b=[14.6;-11.4;14.0;-0.9]
x=A\b    %alinea a
det(A)   %alinea b
inv(A)   %alinea c
```

4. Um engenheiro foi contratado para construir casas em 3 estilos diferentes arquitetónicos: barroco, colonial e rústico. Para tal, determinou as quantidades de materiais (ferro, madeira e cimento) que serão empregues em cada estilo, conforme a tabela seguinte:

Estilo/Materiais	ferro	madeira	cimento
barroco	4	2	1
colonial	2	5	3
rústico	1	2	6

Pretende-se saber o número de unidades necessárias, de cada material, para que se possam construir 13 casas barrocas, 15 casas coloniais e 22 casas rústicas.

(a) Apresente a formulação matemática do problema na forma de sistema de equações lineares.

(b) Resolve o sistema por um método direto e estável.

(c) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes.

Solução

(a)

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 15 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 22 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & | & 13 \\ 2 & 5 & 3 & | & 15 \\ 1 & 2 & 6 & | & 22 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & | & 13 \\ 0 & 4 & 2.5 & | & 8.5 \\ 0 & 1.5 & 5.75 & | & 18.75 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & | & 13 \\ 0 & 4 & 2.5 & | & 8.5 \\ 0 & 0 & 4.8125 & | & 15.5625 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{-2}{4} = -0.5 \qquad m_{32} = \frac{-1.5}{4} = -0.375$$

$$m_{31} = \frac{-1}{4} = -0.25$$

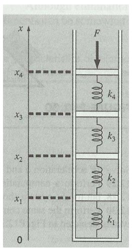
$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 13 \\ 4x_2 + 2.5x_3 & = & 8.5 \\ 4.8125x_3 & = & 15.5625 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{13-2\times(0.1039)-3.2338}{4} \\ x_2 = \frac{8.5-2.5(3.2338)}{4} \\ x_3 = \frac{15.5625}{4.8125} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2.3896 \\ x_2 = 0.1039 \\ x_3 = 3.2338 \end{array} \right.$$

(c) $det(A) = (-1)^0 \times 4 \times 4 \times 4.8125 = 77$

Resolução em Matlab/Octave

```
A=[4 2 1; 2 5 3;1 2 6]
b=[13;15;22]
x=A\b
```

5. Considere a figura que representa um sistema de 4 molas ligadas em série sujeito a uma força F de 2000 Kg. Numa situação de equilíbrio, as equações força-balanço deduzidas definem inter-relações entre as molas:



$$\left\{ \begin{array}{ll} k_2(x_2 - x_1) & = k_1 x_1 \\ k_3(x_3 - x_2) & = k_2(x_{2-}x_1) \\ k_4(x_4 - x_3) & = k_3(x_{3-}x_2) \\ F & = k_4(x_{4-}x_3) \end{array} \right.$$

em que $k_1 = 150,\ k_2 = 50,\ k_3 = 75$ e $k_4 = 225$ são as constantes das molas (kg/s^2).

(a) Resolva o sistema por um método direto e estável.

(b) Estude as condições suficientes de convergência do método iterativo de Gauss-Seidel, quando aplicado ao sistema.

Solução

(a) $x = (13.3333, 53.3333, 80, 88.8889)^T$

$$A = \begin{pmatrix} -200 & 50 & 0 & 0 \\ 50 & -125 & 75 & 0 \\ 0 & 75 & -300 & 225 \\ 0 & 0 & 225 & -225 \end{pmatrix} \qquad C_{GS} = \begin{pmatrix} 0.000 & 0.250 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.100 & 0.600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.025 & 0.150 & 0.750 \\ 0.000 & 0.025 & 0.150 & 0.750 \end{pmatrix}$$

(b) Nada se pode concluir

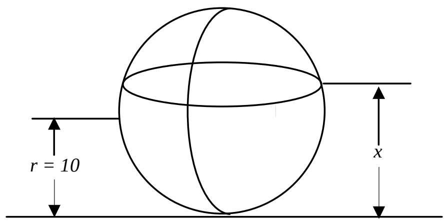
Resolução em Matlab/Octave

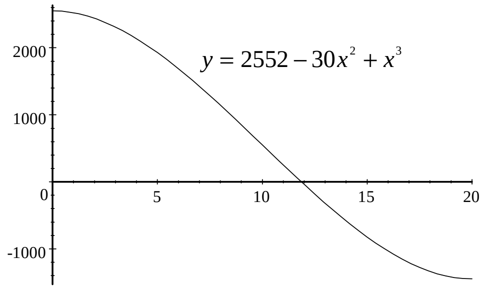
```
A=[-200 50 0 0; 50 -125 75 0; 0 75 -300 225; 0 0 225 -225]
b=[0;0;0;-2000]
x=A\b
```

Equação não linear

6. Uma bola esférica de raio $r = 10$ cm feita de uma substância cuja densidade é $\rho = 0.638$, foi colocada num recipiente com água. Calcule a distância x da parte submersa da bola sabendo que verifica:

$$\frac{\pi\left(x^3 - 3x^2 r + 4r^3\rho\right)}{3} = 0.$$





Use o método de Newton para calcular uma aproximação à solução, usando no critério de paragem $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$ (ou faça no máximo 3 iterações).

Resolução

$$\frac{\pi\left(x^3 - 3x^2 r + 4r^3\rho\right)}{3} = 0 \Longleftrightarrow x^3 - 30x^2 + 2552 = 0$$

Usando o método de Newton

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 60x$$

1^a iteração, $k = 1$

$x_1 = 10 \text{ (ver gráfico)}, f(x_1) = 552, f'(x_1) = -300$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Leftrightarrow x_2 = 11.84$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_2)| = 6.2295 \leq \varepsilon_2 \text{ (Falso)}$$

2^a iteração, $k = 2$

$x_2 = 11.84, \quad f(x_2) = 6.229504, \quad f'(x_2) = -289.8432$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Leftrightarrow x_3 = 11.861493$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_3)| = 0.0026 \leq \varepsilon_2 \text{ (Falso)}$$

3^a iteração, $k = 3$

$x_3 = 11.861493, \quad f(x_3) = 0.002464, \quad f'(x_3) = -289.604531$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \Leftrightarrow x_4 = 11.861502$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_4)| = 0.000143 \leq \varepsilon_2 \text{ Verdadeiro}$$

$$\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = 0.000001 \leq \varepsilon_1 \text{ Verdadeiro}$$

Solução:

$$\begin{cases} x^* \approx 11.861502 \\ f(x^*) \approx -0.000143 \end{cases}$$

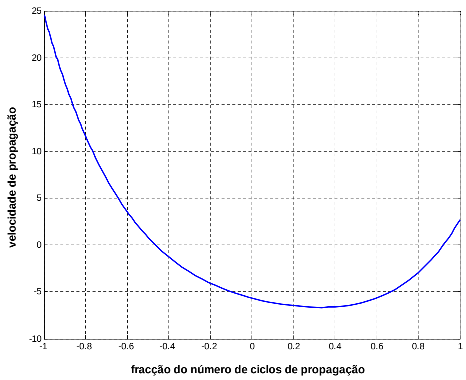
Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('tolX',1e-3);
[x,fval,exitflag,output]=fzero(@exerc_1, 10,op)
%funcao do exerc_1
function f = exerc_1(x)
    f=x^3-30*x^2+2552;
end
```

7. A função

$$a(x) = 2.02x^5 - 1.28x^4 + 3.06x^3 - 2.92x^2 - 5.66x + 6.08$$

é utilizada num estudo do comportamento mecânico de materiais, representando $a(x)$ o comprimento da fissura e x (> 0) uma fração do número de ciclos de propagação.



Pretende-se saber para que valores de x a velocidade de propagação da fissura é nula. Utilize um método que não recorre ao cálculo de derivadas, usando no critério de paragem $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ ou no máximo 3 iterações.

Resolução

A velocidade de propagação da fissura (ver gráfico) é a taxa de variação (derivada) da função $a(x)$ que representa o comprimento da fissura. Assim, pretende-se determinar o ponto para a qual a velocidade de propagação é nula, ou seja, quando $a'(x) = 0$.

$$a(x) = 2.02x^5 - 1.28x^4 + 3.06x^3 - 2.92x^2 - 5.66x + 6.08$$

$$a'(x) = 10.1x^4 - 5.12x^3 + 9.18x^2 - 5.84x - 5.66$$

Usar o método da secante, que não usa derivadas. Precisamos de pontos iniciais, e pela figura, temos dois zeros para a velocidade, entre [-0.6 -0.4] e outro entre [0.8 1]. Mas ciclos negativos não nos interessam, por isso iremos usar $x_1 = 0.8$ e $x_2 = 1$.

$$f(x) = 10.1x^4 - 5.12x^3 + 9.18x^2 - 5.84x - 5.66 = 0$$

1^a iteração, $k = 2$

$x_1 = 0.8, f(x_1) = -2.9413$

$x_2 = 1, f(x_2) = 2.66$

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} \Leftrightarrow x_3 = 0.905022$$

- Critério de paragem: $|f(x_3)| = |-0.445866| \leq \varepsilon_2$ Falso!!

2^a iteração, $k = 3$

$x_2 = 1, f(x_2) = 2.66$

$x_3 = 0.905022, f(x_3) = -0.445866$

$$x_4 = x_3 - \frac{(x_3 - x_2)f(x_3)}{f(x_3) - f(x_2)} \Leftrightarrow x_4 = 0.9187$$

- Critério de paragem: $|f(x_4)| = |-0.053709| \leq \varepsilon_2$ Falso!!

3^a iteração, $k = 4$

$x_3 = 0.905022, f(x_3) = -0.445866$

$x_4 = 0.9187, f(x_4) = -0.053709$

$$x_5 = x_4 - \frac{(x_4 - x_3)f(x_4)}{f(x_4) - f(x_3)} \Leftrightarrow x_5 = 0.9205$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_5)| = |0.0013| \leq \varepsilon_2 \text{ Verdadeiro}$$

$$\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 0.002 \leq \varepsilon_1 \text{ Verdadeiro}$$

Verificam-se ambas as condições, então o processo termina

$$\begin{cases} x^* \approx 0.9205 \\ f(x^*) \approx 0.0013 \end{cases}$$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('tolX',1e-2)
[x,fval,exitflag,output]=fzero(@exerc2,[0.8 1],op)
%funcao
function a = exerc2(x)
    a = 10.1*x^4-5.12*x^3+9.18*x^2-5.84*x-5.66
end
```

8. O volume v de um líquido num tanque esférico de raio r está relacionado com a profundidade h do líquido da seguinte forma:

$$v = \frac{\pi h^2(3r-h)}{3}.$$

   (a) Calcule, utilizando um método que não recorre ao cálculo de derivadas, a profundidade h, num tanque de raio $r=1$ para um volume de 0.5. Utilize para aproximação inicial o intervalo $[0.25, 0.5]$ e considere $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ ou no máximo 3 iterações.

   (b) Repita os cálculos, nas mesmas condições da alínea anterior, mas utilizando para aproximação inicial o intervalo $[2.5, 3]$. Comente os resultados e analise a viabilidade da solução encontrada.

Resolução

(a)

$$f(x) = \frac{\pi x^2(3*1-x)}{3} - 0.5 = 0$$

Usar o método da secante, que não usa derivadas.

Pontos iniciais - $x_1 = 0.25$ e $x_2 = 0.5$.

Mudança de variável de $h \Longrightarrow x$ (para facilitar).

1^a iteração, $k=2$

$x_1 = 0.25, f(x_1) = -0.32$

$x_2 = 0.5, f(x_2) = 0.1545$

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2-x_1)f(x_2)}{f(x_2)-f(x_1)} \Leftrightarrow x_3 = 0.4186$$

- Critério de paragem: $|f(x_3)| = |-0.0263| \leq \varepsilon_2$ Falso!!

2^a iteração, $k=3$

$x_2 = 0.5, f(x_2) = 0.1545$

$x_3 = 0.4186, f(x_3) = -0.0263$

$$x_4 = x_3 - \frac{(x_3 - x_2)f(x_3)}{f(x_3) - f(x_2)} \Leftrightarrow x_4 = 0.4304$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_4)| = |-0.0014| \leq \varepsilon_2 \text{ Verdadeiro!!}$$

$$\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = 0.0275 \leq \varepsilon_1 \text{ Falso!!}$$

3^a iteração, $k = 4$

$x_3 = 0.4186, f(x_3) = -0.0263$

$x_4 = 0.4304, f(x_4) = -0.0014$

$$x_5 = x_4 - \frac{(x_4 - x_3)f(x_4)}{f(x_4) - f(x_3)} \Leftrightarrow x_5 = 0.4311$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_5)| = |1.5297e - 05| \leq \varepsilon_2 \text{ Verdadeiro}$$

$$\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 0.0016 \leq \varepsilon_1 \text{ Verdadeiro}$$

$$\begin{cases} x^* \approx 0.4311 \\ f(x^*) \approx 1.5297e - 05 \end{cases}$$

(b) Os cálculos são os mesmos da alínea (a), contudo o intervalo agora é [2.5 3].

No final da 1^a iteração temos que $x_3 = 2.923606$ e o critério de paragem será satisfeito no final da 2^a iteração com $x_4 = 2.9441$.

No entanto, apesar de ser um solução da equação (fazer a representação gráfica), este valor não faz sentido no contexto do enunciado do exercício, uma vez que a profundidade do líquido é superior ao diâmetro do reservatório ($r = 1 \longrightarrow diametro = 2$).

Resolução em Matlab/Octave

```
fplot(@exerc3,[0,3])   %para fazer o grafico da funcao
%para obter a raiz da equacao
op=optimset('tolX',1e-2);
[x,fval,exitflag,output]=fzero(@exerc3,[0.25 0.5],op)
function f = exerc3(x)
   f = ((pi*x^2*(3*1-x)/3))-0.5;
end
```

9. A concentração de uma bactéria $c(t)$ num depósito decresce de acordo com a seguinte expressão

$$c(t) = 70e^{-1.5t} + 25e^{-0.075t}.$$

Utilize um método iterativo que recorre ao cálculo da derivada para determinar o tempo necessário até a concentração da bactéria ficar reduzida a 9. Use a seguinte aproximação inicial $t_1 = 5$. Para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$ ou $n_{\max} = 3$.

Solução

$f(x) = 70e^{-1.5x} + 25 * e^{-0.075x} - 9$

$x^* \approx 14.0510$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('TolX',0.05)
[x,fval,exitflag,output]=fzero(@exerc4,5,op)
%funcao
function f = exerc4(x)
f = 70*exp(-1.5*x)+25*exp(-0.075*x)-9;
end
```

10. Baseado num trabalho de Frank-Kamenetski, em 1955, a temperatura no interior de um material, quando envolvido por uma fonte de calor, pode ser determinada se resolvermos a seguinte equação não linear em x:

$$\frac{e^{-0.5x}}{\cosh(e^{0.5x})} = \sqrt{0.5L}.$$

Para $L = 0.088$, calcule a raiz da equação, usando um método iterativo que não recorra a derivadas. Sabendo que a raiz está no intervalo $[0, 2]$, pare o processo iterativo quando o critério de paragem for verificado para $\varepsilon_1 = 0.5$ e $\varepsilon_2 = 0.1$, ou $n_{\max} = 2$.

Nota: $\cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$

Resolução

$f(x) = \sqrt{(0.5 * 0.088)} * \cosh(\exp(0.5 * x)) - \exp(-0.5 * x)$

1^a iteração, $k = 2$

$x_1 = 0, f(x_1) = -0.6763$

$x_2 = 2, f(x_2) = 1.2284$

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1) f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} \Leftrightarrow x_3 = 0.7101$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_3)| = |-0.2393| \leq \varepsilon_2 \text{ Falso!!}$$

2^a iteração, $k = 3$

$$x_4 = x_3 - \frac{(x_3 - x_2)f(x_3)}{f(x_3) - f(x_2)} \Leftrightarrow x_4 = 0.9204$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_4)| = |-0.0982| \leq \varepsilon_2 \text{ Verdadeiro!!}$$
$$\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = 0.2961 \leq \varepsilon_1 \text{ Verdadeiro!!}$$

$$\begin{cases} x^* \approx 0.9204 \\ f(x^*) \approx -0.0982 \end{cases}$$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('tolX',0.5)
[x,fval,exitflag,output]=fzero(@exerc5,[0 2],op)
%funcao
function f = exerc5(x)
    f = sqrt(0.5*0.088)*cosh(exp(0.5*x))-exp(-0.5*x);
end
```

11. A velocidade ascendente, v, de um foguetão pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$v = u\ln(\frac{m_0}{m_0 - q\,t}) - g\,t$$

em que u é a velocidade relativa a que o combustível é expelido, m_0 é a massa inicial do foguetão no instante $t = 0$, q é a taxa de consumo de combustível e g é a aceleração da gravidade. Considerando $u = 2200\ m/s$, $g = 9.8 m/s^2$, $m_0 = 1.6 \times 10^5\ Kg$ e $q = 2680\ Kg/s$, calcule o tempo para o qual o foguetão atinge a velocidade $v = 1000\ m/s$, sabendo que esse instante está entre 20 s e 30 s. Utilize o método que achar mais adequado, com $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ e $\varepsilon_2 = 10^{-1}$ ou no máximo 3 iterações.

Solução

$$f(x) = 2200\ ln(\frac{160000}{160000 - 2680x}) - 9.8x - 1000 = 0$$

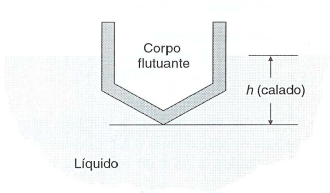
Com o método da secante: $x_1 = 20$, $x_2 = 30$, $x_3 = 25.5229$, $x_4 = 25.9124$, $x_5 = 25.9426$.

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('tolX',1e-2)
[x,fval,exitflag,output]=fzero(@exerc6,[20 30],op)
%funcao
function f = exerc6(x)
   f = 2200*log(1.6e+5/(1.6e+5-2680*x))-9.8*x-1000;
end
```

12. Pela aplicação do Princípio de Arquimedes para determinação do calado de embarcações, pretende determinar-se a profundidade h correspondente ao equilíbrio tal que

$$\gamma_s V_s = \gamma_l V_l(h)$$



com $\gamma_s = 918.35\ kg/m^3$ (densidade do sólido), $V_s = 1700m^3$ (volume do sólido), $\gamma_l = 1.025kg/m^3$ (densidade do líquido) e $V_l(h)$ volume do líquido deslocado (ver figura).
Utilize o método de Newton para calcular o valor de $hV_l(h) = h(h-40)^2$. Utilize para aproximação inicial $h_1 = 140$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$, ou no máximo 3 iterações.

Solução

$V_l(h) = \gamma_s V_s / \gamma_l$ e $V_l(h) = h(h-40)^2$

$V_l(h) = 918.35 * 1700/1.025 = 1523117.073$

$h(h-40)^2 = 1523117.073$

$f(x) = x(x-40)^2 - 1523117.073 = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 160x + 1600$

$x_1 = 140$, $x_2 = 143.2399$, $x_3 = 143.1504$, $x_4 = 143.1503$

Resolução em Matlab/Octave

```
%ver o grafico da funcao
fplot(@exerc7,[100,150])
grid
%calcular a solucao
op=optimset('tolX',1e-4)
[x,fval,exitflag,output]=fzero(@exerc7,140,op)
%funcao
function f = exerc7(x)
    f = x*(x-40)^2-918.35*1700/1.025;
end
```

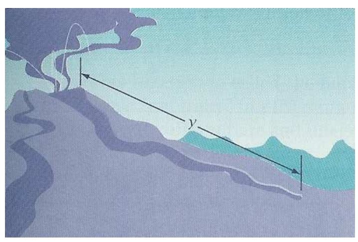
13. A figura representa um vulcão em erupção. A relação entre a distância y (milhas) percorrida pela lava e o tempo t (horas) é dada por:

$$y = 7\ (2 - 0.9^t).$$

Existe uma aldeia no sopé da montanha a uma distância de $y = 10$. O gabinete de proteção civil advertiu os moradores da aldeia de que a lava chegaria às suas casas em menos de 6 horas.

Calcule o instante de tempo em que a lava do vulcão atinge a aldeia, utilizando um método que recorre ao cálculo de derivadas.

Considere $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$ ou no máximo 3 iterações.
Nota: $(a^x)' = a^x \ln(a)$, para a constante.



Solução

$f(x) = 7(2 - 0.9^x) - 10$

$f'(x) = -7(0.9^x)\ln(0.9)$

Aproximação inicial - $x_1 = 6$.

1^a iteração, $k = 1$

$x_1 = 6, f(x_1) = 0.27991,\ f'(x_1) = 0.39195$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Leftrightarrow x_2 = 5.28585$$

- Critério de paragem: $|f(x_2)| = |-0.01080| \leq \varepsilon_2$ Falso!!

2^a iteração, $k = 2$

$x_2 = 5.2858, f(x_2) = -0.01080,\ f'(x_2) = 0.42258$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Leftrightarrow x_3 = 5.31140$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_3)| = \left|-1.45277 \times 10^{-5}\right| \leq \varepsilon_2 \text{ Verdadeiro!!}$$

$$\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 4.83505 \times 10^{-3} \leq \varepsilon_1 \text{ Falso!!}$$

3^a iteração, $k = 3$

$x_3 = 5.311406, f(x_3) = -1.45277e - 5,\ f'(x_3) = 0.42144$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \Leftrightarrow x_4 = 5.31144$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_4)| = \left|-2.638068 \times 10^{-11}\right| \leq \varepsilon_2 \text{ Verdadeiro}$$

$$\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = 6.490064 \times 10^{-6} \leq \varepsilon_1 \text{ Verdadeiro}$$

$$\begin{cases} x^* \approx 5.31144 \\ f(x^*) \approx -2.638068 \times 10^{-11} \end{cases}$$

Resolução em Matlab/Octave

```
%Representação gráfica da função
fplot(@exerc8,[0,10])
grid %para ver a grelha

%resolver sem opcoes
[x,fval,exitflag,output]=fzero(@exerc8,6)
%resolver com opcao de ver por iteracao
```

```
op1=optimset('Display','iter')
[x,fval,exitflag,output]=fzero(@exerc8,6,op1)

%resolver com opcao de tolfun
op2=optimset('tolfun',1e-3)
[x,fval,exitflag,output]=fzero(@exerc8,6,op2)

%resolver com opcao de tolfun e tolx
op3=optimset('tolfun',1e-3,'tolx',1e-3)
[x,fval,exitflag,output]=fzero(@exerc8,6,op3)

%funcao
function f = exerc8(x)
   f = 7*(2-0.9^(x))-10;
end
```

Sistemas de equações não lineares

14. Pensei em dois números x e y. O produto dos dois somado ao cubo do segundo é igual a 3 e o logaritmo neperiano do segundo adicionado à metade do primeiro é 1. Em que números pensei?

    (a) Formule o problema como um sistema de equações.

    (b) Resolva-o utilizando para aproximação inicial o ponto $(1.9, 1.1)$. Apresente o resultado no final de uma iteração e a correspondente estimativa do erro relativo.

    Resolução

    A formulação do problema é dada por

$$\left\{\begin{array}{l} xy + y^3 = 3 \\ \ln(y) + \frac{x}{2} = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow F(x,y) = \left\{\begin{array}{l} xy + y^3 - 3 = 0 \\ \ln(y) + \frac{x}{2} - 1 = 0 \end{array}\right.$$

    e a matriz do Jacobiano é dada por

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} y & x + 3y^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

    Aproximação inicial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1.1 \end{pmatrix}$$

    1^a iteração, $k = 1$:

$$J(1.9, 1.1) = \begin{pmatrix} 1.10000 & 5.53000 \\ 0.50000 & 0.90909 \end{pmatrix}$$

$$F(1.9, 1.1) = \begin{pmatrix} 0.421000 \\ 0.045310 \end{pmatrix}$$

Resolvendo por EGPP

$$\begin{pmatrix} 1.10000 & 5.53000 \\ 0.50000 & 0.90909 \end{pmatrix} \Delta^{(1)} = -\begin{pmatrix} 0.421000 \\ 0.045310 \end{pmatrix}$$

$$\Delta^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.074879 \\ -0.091025 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(1)} + \Delta^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1.1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.074879 \\ -0.091025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9749 \\ 1.0090 \end{pmatrix}$$

Estimativa do erro relativo:

$$\frac{\left\|\Delta^{(1)}\right\|_2}{\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(2)}\right\|_2} = \frac{0.11787}{2.2177} = 0.053148$$

Resolução em Matlab/Octave

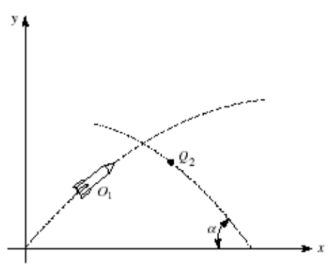
```
[x,fval,exitflag,output]=fsolve(@exerc_19,[1.9,1.1])
%funcao
function [ F ] = exerc_19(x)
   F(1)=x(1)*x(2)+x(2)^3-3;
   F(2)=log(x(2))+x(1)/2-1;
end
```

15. A posição de um determinado objeto O_1 no plano XY é descrita em função do tempo (t) pelas seguintes equações:

$$x_1(t) = t \qquad y_1(t) = 1 - e^{-t}$$

A posição de um segundo objeto O_2 é descrita pelas seguintes equações:

$$x_2(t) = 1 - t\cos(\alpha) \qquad y_2(t) = -0.1t^2 + t\,\mathrm{sen}(\alpha)$$



em que α representa o ângulo, como mostra a figura.
Determine os valores de t e α na posição em que os dois objetos colidem, *i.e.*, na posição em que se igualam as coordenadas x e y:

$$\begin{aligned} t &= 1 - t\cos(\alpha) \\ 1 - e^{-t} &= -0.1t^2 + t\,\mathrm{sen}(\alpha) \end{aligned}$$

Considere os valores iniciais $(t, \alpha)^{(1)} = (4.3, 2.4)$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.015$ ou no máximo duas iterações.

Resolução

Nota: os cálculos devem ser feitos em radianos.

O sistema de equações não lineares é o seguinte

$$\left\{\begin{array}{l} t-1+t\cos(\alpha)=0 \\ 1-e^{-t}+0.1t^2-t\,\mathrm{sen}(\alpha)=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} f_1(t,\alpha)=0 \\ f_2(t,\alpha)=0 \end{array}\right.$$

Matriz do Jacobiano

$$J(t,\alpha)=\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 1+\cos(\alpha) & -t\,\mathrm{sen}(\alpha) \\ e^{-t}+0.2t-\ \mathrm{sen}(\alpha) & -t\cos(\alpha) \end{array}\right)$$

Aproximação inicial:

$$\left(\begin{array}{c} t \\ \alpha \end{array}\right)^{(1)}=\left(\begin{array}{c} 4.3 \\ 2.4 \end{array}\right)$$

1^a iteração, $k=1$:

$$J(4.3,2.4)=\left(\begin{array}{cc} 0.262606 & -2.90449 \\ 0.198105 & 3.170793 \end{array}\right)\ \left(\begin{array}{c} f_1(4.3,2.4) \\ f_2(4.3,2.4) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0.129207 \\ -0.069060 \end{array}\right)$$

Resolvendo por EGPP

$$\left(\begin{array}{cc} 0.262606 & -2.90449 \\ 0.198105 & 3.170793 \end{array}\right)\Delta^{(1)}=-\left(\begin{array}{c} 0.129207 \\ -0.069060 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0.262606 & -2.90449 & -0.129207 \\ 0.198105 & 3.170793 & 0.069060 \end{array}\right) \iff \Delta^{(1)}=\left(\begin{array}{c} -0.148505 \\ 0.031058 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} t \\ \alpha \end{array}\right)^{(2)}=\left(\begin{array}{c} t \\ \alpha \end{array}\right)^{(1)}+\left(\begin{array}{c} -0.148505 \\ 0.031058 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 4.1515 \\ 2.431058 \end{array}\right)$$

Critério de paragem:

$$\frac{\left\|\Delta^{(1)}\right\|_2}{\left\|\left(\begin{array}{c} t \\ \alpha \end{array}\right)^{(2)}\right\|_2}=\frac{0.15172}{4.81092}=0.03154\leq 0.015 \quad \text{(falso)}$$

2^a iteração, $k=2$:

$$J(4.1515,2.431058)=\left(\begin{array}{cc} 0.241987 & -2.70777 \\ 0.193802 & 3.146892 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f_1(4.1515,2.431058) \\ f_2(4.1515,2.431058) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0.004608 \\ -1.6367\times 10^{-5} \end{array}\right)$$

Resolver por EGPP:

$$\left(\begin{array}{ccc} 0.241987 & -2.70777 & | -0.004608 \\ 0.193802 & 3.146892 & |1.6367 \times 10^{-5} \end{array}\right) \Longleftrightarrow \Delta^{(2)} = \left(\begin{array}{c} -0.01124 \\ 0.0006973 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} t \\ \alpha \end{array}\right)^{(3)} = \left(\begin{array}{c} t \\ \alpha \end{array}\right)^{(2)} + \left(\begin{array}{c} -0.01124 \\ 0.0006973 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 4.14026 \\ 2.43176 \end{array}\right)$$

Critério de paragem:

$$\frac{\left\|\Delta^{(2)}\right\|_2}{\left\|\left(\begin{array}{c} t \\ \alpha \end{array}\right)^{(3)}\right\|_2} = \frac{0.01126}{4.80158} = 0.000235 \leq \varepsilon_1 \qquad \text{(verdade)}$$

$$\left\|\left(\begin{array}{c} f_1(4.14026, 2.43176) \\ f_2(4.14026, 2.43176) \end{array}\right)\right\|_2 = \left\|\left(\begin{array}{c} 6.6 \times 10^{-6} \\ 5.0 \times 10^{-6} \end{array}\right)\right\|_2 = 8.3 \times 10^{-6} \leq \varepsilon_2 \qquad \text{(verdade)}$$

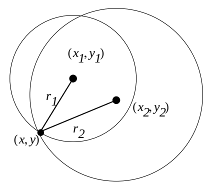
As duas condições do critério de paragem são verificadas logo:

$$\left(\begin{array}{c} t \\ \alpha \end{array}\right)^{(*)} \approx \left(\begin{array}{c} t \\ \alpha \end{array}\right)^{(3)} = \left(\begin{array}{c} 4.14026 \\ 2.43176 \end{array}\right)$$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('tolfun',0.015,'tolx',0.015);    %tolerancias de paragem
x=[4.3 2.4];   %aproximacao inicial
%resolver o sistema
[x,fval,exitflag,output]=fsolve(@exerc_20,x,op)
%funcao
function [ F ] = exerc_20(x)
    F(1)=1-x(1)*cos(x(2))-x(1);
    F(2)=-0.1*x(1)^2+x(1)*sin(x(2))-1+exp(-x(1));
end
```

16. Em problemas de navegação, é necessário encontrar a posição de um ponto (x, y), através dos valores das distâncias r_1 e r_2 a dois pontos de posição conhecida (x_1, y_1) e (x_2, y_2), como mostra a figura.



(a) Formule o problema como um sistema de equações não lineares em função das coordenadas do ponto (x, y).

(b) Considerando $(x_1, y_1) = (10, 10)$, $(x_2, y_2) = (10, -10)$, $r_1 = 14$ e $r_2 = 16$, calcule as coordenadas do ponto (x, y) através do método iterativo de Newton considerando a seguinte aproximação inicial $(x, y)^{(1)} = (0, 0)$. Apresente o valor ao fim de duas iterações com a correspondente estimativa do erro relativo.

Solução

a) Formulação:

$$\begin{cases} (x-10)^2 + (y-10)^2 = 14^2 \\ (x-10)^2 + (y-(-10))^2 = 16^2 \end{cases}$$

b) $(x,y)^{(3)} = (-1.125664, 1.5)^T$

Resolução em Matlab/Octave

```
[x,fval,exitflag,output]=fsolve(@exerc_21,[0 0])
function [ F ] = exerc_21(x)
    F(1)=(x(1)-10)^2+ (x(2)-10)^2-14^2;
    F(2)=(x(1)-10)^2+(x(2)+10)^2-16^2;
end
```

17. Num coletor solar, um balanço de energia na placa absorvente e na placa de vidro produz o seguinte sistema de equações não lineares nas temperaturas absolutas da placa absorvente (x_1) e da placa de vidro (x_2)

$$\begin{cases} x_1^4 + 0.068x_1 - x_2^4 - 0.058x_2 &= 0.015 \\ x_1^4 + 0.058x_1 - 2x_2^4 - 0.117x_2 &= 0 \end{cases}.$$

Considerando a seguinte aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (0.3, 0.3)$, implemente duas iterações do método de Newton. Apresente uma estimativa do erro relativo da aproximação calculada.

Solução

A formulação do problema é dada por

$$F(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1^4 + 0.068x_1 - x_2^4 - 0.058x_2 - 0.015 \\ x_1^4 + 0.058x_1 - 2x_2^4 - 0.117x_2 \end{cases}$$

A matriz do Jacobiano é dada por

$$J(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 + 0.068 & -4x_2^3 - 0.058 \\ 4x_1^3 + 0.058 & -8x_2^3 - 0.117 \end{pmatrix}$$

1^a iteração

$$\Delta^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.0092 \\ -0.0821 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.2908 \\ 0.2179 \end{pmatrix}$$

2^a iteração

$$\Delta^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.0001 \\ -0.0301 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.2907 \\ 0.1878 \end{pmatrix}$$

Erro relativo

$$\frac{||\Delta^{(2)}||_2}{\|x^{(3)}\|_2} = 0.0869$$

Resolução em Matlab/Octave

```
[x,fval,exitflag,output]=fsolve(@exerc_22,[0.30 0.30])
%funcao
function [ F ] = exerc_22(x)
    F(1)=(x(1)^4+0.068*x(1))-(x(2)^4+0.058*x(2))-0.0159;
    F(2)=(x(1)^4+0.058*x(1))-(2*x(2)^4+0.117*x(2));
end
```

18. A concentração de um poluente num lago depende do tempo t e é dada por

$$C(t) = 70\, e^{\beta t} + 20\, e^{\omega t}\,.$$

Efetuaram-se duas medições da concentração que foram registadas na seguinte tabela

t	1	2
$C(t)$	27.5702	17.6567

Utilize o método de Newton para determinar β e ω. Considere a aproximação inicial $(\beta,\omega)^{(1)} = (-1.9, -0.15)$. Implemente uma iteração e apresente um estimativa do erro relativo da aproximação calculada.

Solução

$$\left\{\begin{array}{l} 70e^{x_1} + 20e^{x_2} - 27.5702 = 0 \\ 70e^{2x_1} + 20e^{2x_2} - 17.6567 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow x^{(2)} = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} -1.9987 \\ -0.0966 \end{array}\right)$$

Resolução em Matlab/Octave

```
[x,fval,exitflag,output]=fsolve(@exerc_23,[-1.9 -0.15])
%
function [ F ] = exerc_23(x)
    F(1)=70*exp(x(1))+20*exp(x(2))-27.5702;
    F(2)=70*exp(2*x(1))+20*exp(2*x(2))-17.6567;
end
```

Interpolação polinomial

19. Os registos efetuados numa linha de montagem são os seguintes:

n^o de unidades	1	3	4	6	7	10
horas necessárias	2	3	4	5	6	10

(a) Tendo sido recebidos pedidos para a montagem de 2 unidades e 8 unidades, use interpolação cúbica para estimar o tempo (em horas) necessário para satisfazer cada pedido.

(b) Estime o erro de truncatura cometido na alínea anterior.

Resolução

(a) Se se pretende interpolação cúbica, então o polinómio é de grau 3 ($n = 3$), são necessários 4 ($n + 1$) pontos. Usa-se o polinómio interpolador de Newton.

$$p_3(x) = f_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

Para a montagem de 2 unidades:

1) Escolher/selecionar os pontos que estão mais próximos de 2, incluindo o que está à sua esquerda e à direita. Por isso, os pontos selecionados são: 1, 3, 4, 6.

2) Construir a tabela das diferenças divididas baseada nesses pontos

i	x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$
0	1	**2**			
			0.5		
1	3	3		**0.166667**	
			1.0		**-0.066667**
2	4	4		-0.166667	
			0.5		
3	6	5			

3) Construir o polinómio

$$p_3(x) = 2 + (x - 1) * 0.500000 + (x - 1)(x - 3) * 0.166667 + (x - 1)(x - 3)(x - 4) * (-0.066667)$$

4) Estimar o tempo de montagem de 2 unidades:

$$p_3(2) = 2.2$$

Para a montagem de 8 unidades:

1) Escolher/selecionar os pontos que estão mais próximos de 8, incluindo o que está à sua esquerda e à direita. Por isso, os pontos selecionados são: 4, 6, 7, 10.

2) Construir a tabela das diferenças divididas baseada nesses pontos

i	x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$
0	4	**4**			
			0.500000		
1	6	5		**0.166667**	
			1.000000		**-0.013889**
2	7	6		0.083333	
			1.333333		
3	10	10			

3) Construir o polinómio

$$p_3(x) = 4 + (x - 4) * 0.500000 + (x - 4)(x - 6) * 0.166667 + (x - 4)(x - 6)(x - 7) * (-0.013889)$$

4) Estimar o tempo de montagem de 8 unidades: $p_3(8) = 7.2222$ **(b)** Para calcular o erro de truncatura, utiliza-se a expressão

$$|R_3(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)||dd4|$$

Por isso, acrescentar um ponto a cada uma das tabelas das diferenças divididas construídas anteriormente, para podermos calcular a $dd4$.

Para a montagem de 2 unidades:

i	x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$
0	1	2				
			0.500000			
1	3	3		0.166667		
			1.000000		-0.066667	
2	4	4		-0.166667		**0.025**
			0.500000		0.083333	
3	6	5		0.166667		
			1.000000			
z	7	6				

$$|R_3(x)| \leq |(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6)||0.025|$$

Substituindo para $x = 2$, então $|R_3(2)| \leq 0.2$.

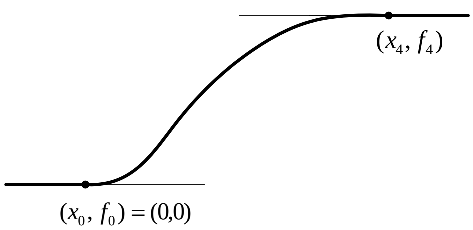
Para a montagem de 8 unidades:

i	x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$
0	4	4				
			0.500000			
1	6	5		0.166667		
			1.000000		-0.013889	
2	7	6		0.083333		**-0.013889**
			1.333333		0.000000	
3	10	10		0.083333		
			1.000000			
z	3	3				

$$|R_3(x)| \leq |(x - 4)(x - 6)(x - 7)(x - 10)|| - 0.013889|$$

Substituindo para $x = 8$, então $|R_3(8)| = 0.222224$.

20. Pretende-se construir um desvio entre duas linhas de caminho de ferro paralelas. O desvio deve corresponder a um polinómio de grau três que une os pontos $(x_0, f_0) = (0, 0)$ e (x_4, f_4), como mostra a figura.



Com base nos dados da tabela

x_i	0	1	1.5	2	x_4
$f_i = p_3(x_i)$	0	0.3125	0.6328125	1	f_4

verifique se o ponto $(x_4, f_4) = (4, 2)$ pertence ao polinómio. Use 7 casas decimais nos cálculos.

Resolução

Para sabermos se o ponto $(x_4, f_4) = (4, 2)$ pertence ao polinómio de grau 3, podemos resolver de duas formas:

(a) calcular as diferenças divididas com base em todos os pontos da tabela, incluindo o ponto $(x_4, f_4) = (4, 2)$. Se as $dd3$ forem todas iguais e as $dd4 = 0$ então o ponto pertence ao polinómio, pela propriedade "para pontos que pertencem a um polinómio de grau n as diferenças divididas de ordem n são todas iguais entre si (e diferentes de zero) e as de ordem $n + 1$ são nulas"

(b) calcular o polinómio de grau 3 com base nos pontos da tabela e verificar se $p_3(4) = 2$.

A resolução abaixo apresentada é feita pela forma sugerida em 1), visto ser a menos "trabalhosa".

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$
0	0				
		0.3125			
1	0.3125		0.21875		
		0.640625		-0.0625	
1.5	0.6328125		0.09375		0
		0.734375		-0.0625	
2	1		-0.09375		
		0.5			
4	2				

Uma vez que as $dd3$ são iguais e a $dd4$ é zero, conclui-se que f é um polinómio de grau 3 e o ponto $(4, 2)$ pertence a esse polinómio.

21. A tabela apresenta a população dos Estados Unidos da América (em milhões) de 1940 a 1980.

Ano	1940	1950	1960	1970	1980
População	132.165	151.326	179.323	203.302	226.542

(a) Construa o polinómio interpolador de Newton de grau 4 para estimar a população em 1965.

(b) A população em 1930 foi 123.203. Qual a precisão do valor calculado em a)?

Resolução

(a) Para construir o polinómio interpolador de Newton de grau 4 e estimar a população em 1965:

1) Escolher/selecionar os pontos. Se o polinómio é de grau 4 ($n = 4$) são necessários 5 ($n + 1$) pontos. Usa-se o polinómio interpolador de Newton.

$$\begin{aligned} p_4(x) = \;& f_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3] + \\ & (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \end{aligned}$$

2) Construir a tabela das diferenças divididas

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$
1940	132.165				
		1.9161			
1950	151.326		0.044180		
		2.7997		-0.002142	
1960	179.323		-0.020090		0.000067
		2.3979		0.000547	
1970	203.302		-0.003695		
		2.3240			
1980	226.542				

3) Construir o polinómio

$$\begin{aligned} p_4(x) = \quad & 132.165 + (x-1940) * 1.9161 + (x-1940)(x-1950) * 0.044180 + \\ & (x-1940)(x-1950)(x-1960) * (-0.002142) + \\ & (x-1940)(x-1950)(x-1960)(x-1970) * 0.000067 \end{aligned}$$

4) Estimar o valor da população em 1965.

$$p_4(1965) = 191.987930$$

(b) Para calcular a precisão (erro) do valor calculado em a), usa-se a expressão

$$|R_4(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)||dd5|$$

Por isso, o valor da população em 1930 vai ser acrescentado à tabela das diferenças divididas construída anteriormente, para podermos calcular a $dd5$. O local de colocação do novo ponto é indiferente, que a $dd5$ será sempre a mesma.

i	x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$	$dd5$
0	1940	132.165					
			1.9161				
1	1950	151.326		0.044180			
			2.7997		-0.002142		
2	1960	179.323		-0.020090		0.000067	
			2.3979		0.000547		0.000002
3	1970	203.302		-0.003695		0.000044	
			2.3240		-0.000338		
4	1980	226.542		0.006431			
			2.06678				
5	1930	123.203					

O erro de truncatura é dado por

$$|R_4(x)| \leq |(x-1940)(x-1950)(x-1960)(x-1970)(x-1980)||0.000002|$$

Substituindo para $x = 1965$, a precisão é de:

$$|R_4(1965)| \leq |(1965-1940)(1965-1950)(1965-1960)(1965-1970)(1965-1980)||0.000002| = 0.28125$$

22. Considere a seguinte tabela da função $f(x)$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	a	2	1	0	4

$a \in \Re$.

Determine a de modo a que o polinómio interpolador de $f(x)$ nos pontos da tabela dada seja de grau 3. Justifique.

Resolução

Para determinar a de modo que os valores de $f(x)$ sejam de um polinómio de grau 3, podemos resolver de duas formas:

(a) calcular as diferenças divididas com base em todos os pontos da tabela e para que $f(x)$ seja um polinómio de grau três, as diferenças divididas de grau três têm de ser iguais entre si e diferentes de zero (e consequentemente as $dd4 = 0$).

(b) calcular o polinómio de grau 3 com base nos pontos -1, 0, 1, 2 da tabela e depois $p_3(-2)$.

A resolução abaixo apresentada é feita pela forma sugerida em 1), visto ser a menos "trabalhosa".

Construir a tabela das diferenças divididas com base em todos os pontos da tabela

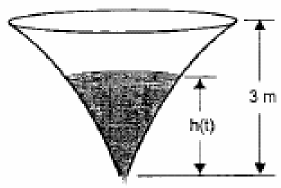
x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$
-2	a			
		$2-a$		
-1	2		$0.5a-1.5$	
		-1		$\frac{1.5-0.5a}{3}$
0	1		0	
		-1		$\frac{2.5}{3}$
1	0		2.5	
		4		
2	4			

Pelo propriedade que diz que "se os pontos de $f(x)$ (da tabela) pertencem a um polinómio de grau três, então as diferenças divididas de grau três têm de ser iguais entre si e diferentes de zero", logo

$$\frac{1.5-0.5a}{3} = \frac{2.5}{3} \Longrightarrow a = -2$$

23. A figura representa um reservatório.

Considere que, no início, o reservatório tem água até uma altura de 2.1 metros. Num certo instante abre-se a válvula e o reservatório começa a ser esvaziado. A altura (em metros) de água no reservatório, t horas depois de este ter começado a ser esvaziado, é dada por $h(t)$, de acordo com a tabela



Instante, t_i	0	1	4	7	8	10	14
Altura de água, $h(t_i)$	2.1	2.0	1.8	1.5	1.4	1.1	0

(a) Use um polinómio de interpolação de grau 3 para estimar a altura de água no reservatório ao fim de 5 horas.

(b) Suponha que a altura de água pode ser estimada pelo modelo

$$M(t; c_1, c_2) = \ln(c_1 - c_2 t).$$

Determine c_1 e c_2 tomando apenas os três pontos da tabela que se encontram igualmente distanciados e use quatro casas decimais nos cálculos. Qual o valor da altura de água que o modelo calculado fornece para $t = 5$ horas.

Resolução

(a) Para construir um polinómio de interpolação de Newton grau 3 ($n = 3$) para estimar a altura de água no reservatório ao fim de 5 horas vão usar-se os seguintes pontos ($n+1 = 4$): 1, 4, 7, 8.

A tabela das diferenças divididas é:

```
x    f         dd1          dd2          dd3
1    2.0
          -0.0667
4    1.8                 -0.0056
            -0.1000                    0.0008
7    1.5                 -0.0000
            -0.1000
8    1.4
```

$$p_3(x) = 2.0 + (x-1)(-0.0667) + (x-1)(x-4)(-0.0056) + (x-1)(x-4)(x-7)(0.0008)$$

A altura de água no reservatório ao fim de 5 horas é $p_3(5) = 1.7044$ metros.

(b) Uma vez que o modelo $M(x)$ é não linear nos parâmetros c_1 e c_2, inicialmente deve ser linearizado de modo a transformá-lo num modelo linear:

$$M(t; c_1, c_2) = \ln(c_1 - c_2 t)$$

é equivalente a

$$e^{M(t;c_1,c_2)} = c_1 - c_2 t$$

Para a determinação deste modelo teremos de construir uma tabela auxiliar, com valores de $\exp(h(t))$ em vez de $h(t)$.

Instante, t_i	0	4	8
$e^{(h(t_i))}$	$e^{2.1}$	$e^{1.8}$	$e^{1.4}$

Passo 1: $n = 2$. Identificação das funções Φ_i:

$$\Phi_1(x) = 1 \qquad \Phi_2(x) = -x$$

Passo 2: Construir o sistema de equações normais

$$\left(\begin{array}{ll|l} \sum_{j=1}^{3} \Phi_1^2(x_j) & \sum_{j=1}^{3} \Phi_2(x_j)\Phi_1(x_j) & \sum_{j=1}^{3} f_j \Phi_1(x_j) \\ \sum_{j=1}^{3} \Phi_1(x_j)\Phi_2(x_j) & \sum_{j=1}^{3} \Phi_2^2(x_j) & \sum_{j=1}^{3} f_j \Phi_2(x_j) \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 3 & -12 & 18.2710 \\ -12 & 80 & -56.6402 \end{array} \right)$$

Passo 3: Resolver o sistema resultante por EGPP

$$c = \begin{pmatrix} 8.1458 \\ 0.5139 \end{pmatrix}$$

Passo 4: Construir o modelo

$$M(t) = \ln(8.1458 - 0.5139t)$$

A altura de água que o modelo calculado fornece para $t = 5$ horas é: $M(5) = 1.7185$.

24. Considere a seguinte tabela de uma função polinomial

x	-1	0	1	2	3	4
$p(x)$	-1	-3	-1	5	15	29

Sem recorrer à expressão analítica de $p(x)$:

(a) Mostre que $p(x)$ é um polinómio interpolador de grau 2.

(b) Determine $p(10)$.

Resolução

(a) Construir a tabela das diferenças divididas

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$
-1	-1			
		-2		
0	-3		2	
		2		0
1	-1		2	
		6		0
2	5		2	
		10		0
3	15		2	
		14		
4	29			

Como $dd2$ são todas iguais entre si (e diferentes de zero), e consequentemente as $dd3$ são iguais a zero, conclui-se que $p(x)$ é um polinómio interpolador de grau 2.

(b) Pretende determinar-se $p(10)$, sem calcular a expressão de $p(x)$. Por isso, inclui-se o ponto interpolador (10) no final da tabela e determinam-se as diferenças divididas de ordem 1, $dd1$, sabendo que a $dd2 = 2$. Por fim, calcula-se $p(10) \approx f(10)$.

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$
-1	-1			
		-2		
0	-3		2	
		2		0
1	-1		2	
		6		0
2	5		2	
		10		0
3	15		2	
		14		
4	29		2	
		A		
10	x			

$$\frac{14 - A}{3 - 10} = 2 \Longleftrightarrow A = 28$$

$$\frac{29 - x}{4 - 10} = 28 \Longleftrightarrow x = 197$$

Logo, $p(10) = 197$.

25. Considere uma função f da qual se conhecem os seguintes valores

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	6	2	0	a	0

(a) Construa a tabela das diferenças divididas.

(b) Determine a (real) para o qual a tabela representa um polinómio de grau 3.

(c) Determine a (real) para o qual o coeficiente do termo de maior grau do polinómio interpolador de Newton, calculado com base em todos os pontos da tabela, é igual a um.

Resolução

(a) A tabela das diferenças divididas é dada por:

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$
-2	6				
		-4			
-1	2		1		
		-2		$\frac{a}{6}$	
0	0		$\frac{a+2}{2}$		$\frac{-(4a+2)}{24}$
		a		$\frac{-(3a+2)}{6}$	
1	a		$-a$		
		$-a$			
2	0				

(b) Para o polinómio interpolador de Newton ser de grau 3, então as diferenças divididas de ordem 3 devem ser iguais entre si e diferentes de zero ou as diferenças divididas de ordem 4 serem iguais a zero..

Então

$$\frac{-(3a+2)}{6} = \frac{a}{6} \Longrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

(c) Uma vez que temos 5 ($n+1=5$) pontos, o polinómio interpolador de Newton que podemos construir (com base em todos os pontos da tabela) é de grau 4 ($n=4$), cuja expressão é dada por

$$p_4(x) = f_0+(x-x_0)dd1+(x-x_0)(x-x_1)dd2+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dd3+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dd4$$

Verificamos que o coeficiente do termo de maior grau do polinómio interpolador de Newton de grau 4 é dado pela $dd4$. Logo, fazendo $dd4 = 1$

$$\frac{-(4a+2)}{24} = 1 \Longrightarrow a = -\frac{26}{4}.$$

26. A velocidade de ascensão de um foguetão, $v(t)$, é conhecida para diferentes tempos conforme a seguinte tabela. Esta velocidade pode ser estimada através de um polinómio de colocação de grau dois.

t(seg.)	$v(t)$(metros/seg.)
0	0
5	106.8
10	227.04
15	362.78
20	517.35
30	901.67

(a) Calcule o polinómio e estime a velocidade do foguetão para $t = 8$ seg.

(b) Estime a aceleração do foguetão para $t = 8$ seg.

(c) Estime a precisão do valor calculado em (a).

Resolução

(a) Para construir um polinómio de grau 2 precisamos de 3 pontos. Os pontos escolhidos são os mais próximos de 8: 5, 10, 15.

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$
5	106.8		
		24.0480	
10	227.04		0.31
		27.1480	
15	362.78		

$p_2(x) = 106.8 + (x-5) * 24.0480 + (x-5)(x-10) * 0.31$

$p_2(8) = 177.0840$

(b) No cálculo da aceleração é determinada a derivada da velocidade

$a(x) = p_2'(x) = 0.62x + 19.3980$

$a(8) = 24.3580$

(c) Para o cálculo do erro de truncatura, usa-se a expressão $|R_2(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|dd3|$ e acrescenta-se mais um ponto à tabela das diferenças divididas anterior, para calcular a $dd3$. O ponto a acrescentar é o $(0, 0)$, pois é que se encontra mais próximo de 8 e que ainda não foi usado.

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$
5	106.8			
		24.0480		
10	227.04		0.31	
		27.1480		0.0027
15	362.78		0.2963	
		24.1853		
0	0			

$|R_2(x)| \leq |(x-5)(x-10)(x-15)||0.0027|$

$R_2(8) = 0.1134$

Aproximação dos mínimos quadrados

27. A resistência de um certo fio (de uma certa substância), $f(x)$, varia com o diâmetro desse fio, x. A partir de uma experiência registaram-se os seguintes valores:

x_i	1.5	2.0	3.0	4.0
$f(x_i)$	4.9	3.3	2.0	1.5

Foram sugeridos os seguintes modelos para ajustar os valores de $f(x)$, no sentido dos mínimos quadrados: uma reta, uma parábola e o modelo linear $M(x, c_1, c_2) = \frac{c_1}{x} + c_2 x$.

(a) Calcule a reta.

(b) Calcule a parábola.

(c) Calcule o modelo M.

(d) Qual dos modelos escolheria? Justifique a sua escolha.

Resolução

(a) Pretende determinar-se uma reta, que é um polinómio de grau 1 (modelo linear polinomial)

$$p_1(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x)$$

Passo 1: Construir os polinómios ortogonais da sequência de polinómios ortogonais $P_0(x)$ e $P_1(x)$, sabendo que $P_0(x) = 1,\ P_{-1}(x) = 0$

$$P_1(x) = (x - B_0)P_0(x) - C_0P_{-1}(x) = x - B_0$$

$$B_0 = \frac{\sum_{j=1}^{4} x_j P_0^2(x_j)}{\sum_{j=1}^{4} P_0^2(x_j)} = \frac{\sum_{j=1}^{4} x_j}{\sum_{j=1}^{4} P_0^2(x_j)} = \frac{10.5}{4} = 2.625$$

$$P_1(x) = x - 2.625$$

Passo 2: Cálculo dos coeficientes do polinómio c_0 e c_1

$$c_0 = \frac{\sum_{j=1}^{4} f_j P_0(x_j)}{\sum_{j=1}^{4} P_0^2(x_j)} = \frac{\sum_{j=1}^{4} f_j}{\sum_{j=1}^{4} P_0^2(x_j)} = \frac{11.7}{4} = 2.925$$

$$c_1 = \frac{\sum_{j=1}^{4} f_j P_1(x_j)}{\sum_{j=1}^{4} P_1^2(x_j)}$$

Podemos construir uma tabela para auxiliar os cálculos:

	x_j	f_j	$P_1(x_j)$	$P_1^2(x_j)$	$f_jP_1(x_j)$
	1.5	4.9	-1.125	1.265625	-5.5125
	2.0	3.3	-0.625	0.390625	-2.0625
	3.0	2.0	0.375	0.140625	0.75
	4.0	1.5	1.375	1.890625	2.0625
$\sum$	**10.5**	**11.7**		**3.6875**	**-4.7625**

$$c_1 = \frac{-4.7625}{3.6875} = -1.291525$$

Passo 3: Construção do polinómio

$$\boxed{p_1(x) = 2.925 - 1.291525(x - 2.625)}$$

(b) Pretende determinar-se uma parábola, polinómio de grau 2 (modelo linear polinomial)

$$p_2(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x)$$

$$p_2(x) = \underbrace{c_0P_0(x) + c_1P_1(x)}_{p_1(x)} + c_2P_2(x)$$

$$p_2(x) = p_1(x) + c_2P_2(x)$$

Passo 1: Construir o polinómio ortogonal $P_2(x)$

$$P_2(x) = (x - B_1)P_1(x) - C_1P_0(x) = (x - B_1)P_1(x) - C_1$$

$$B_1 = \frac{\sum_{j=1}^{4} x_j P_1^2(x_j)}{\sum_{j=1}^{4} P_1^2(x_j)}$$

$$C_1 = \frac{\sum_{j=1}^{4} P_1^2(x_j)}{\sum_{j=1}^{4} P_0^2(x_j)}$$

Podemos construir uma tabela auxiliar:

	x_j	f_j	$P_1(x_j)$	$P_1^2(x_j)$	$x_j P_1^2(x_j)$
	1.5	4.9	-1.125	1.265625	1.898438
	2.0	3.3	-0.625	0.390625	0.78125
	3.0	2.0	0.375	0.140625	0.421875
	4.0	1.5	1.375	1.890625	7.5625
$\sum$	**10.5**	**11.7**		**3.6875**	**10.664063**

$$B_1 = \frac{10.6640625}{3.6875} = 2.891949$$

$$C_1 = \frac{3.6875}{4} = 0.921875$$

$$\boxed{P_2(x) = (x - 2.891949)(x - 2.625) - 0.921875}$$

Passo 2: Cálculo do coeficiente do polinómio c_2

$$c_2 = \frac{\sum_{j=1}^{4} f_j P_2(x_j)}{\sum_{j=1}^{4} P_2^2(x_j)}$$

Continuar a tabela auxiliar:

	x_j	f_j	$P_1(x_j)$	$P_1^2(x_j)$	$x_j P_1^2(x_j)$	$f_j P_1(x_j)$	$P_2(x_j)$	$P_2^2(x_j)$	$f_j P_2(x_j)$
	1.5	4.9	-1.125	1.265625	1.898438	-5.5125	0.644068	0.414824	3.155933
	2.0	3.3	-0.625	0.390625	0.78125	-2.0625	-0.364407	0.132792	-1.202543
	3.0	2.0	0.375	0.140625	0.421875	0.75	-0.881356	0.776788	-1.762712
	4.0	1.5	1.375	1.890625	7.5625	2.0625	0.601695	0.362037	0.902543
$\sum$	**10.5**	**11.7**		**3.6875**	**10.664063**	**-4.7625**		**1.686441**	**1.093221**

$$c_2 = \frac{1.093221}{1.686441} = 0.648241$$

Passo 3: Construção do polinómio

$$\boxed{p_2(x) = 2.925 - 1.291525(x - 2.625) + 0.648241\left[(x - 2.891949)(x - 2.625) - 0.921875\right]}$$

(c) Pretende determinar-se um modelo (modelo linear e não polinomial), no sentido dos mínimos quadrados, do tipo

$$M(x; c_1, c_2) = \frac{c_1}{x} + c_2 x$$

Passo 1: $n = 2$. Identificação das funções Φ_i:

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{x}$$
$$\Phi_2(x) = x$$

Passo 2: Construir o sistema de equações normais

$$\left(\begin{array}{cc|c} \sum_{j=1}^{4} \Phi_1^2(x_j) & \sum_{j=1}^{4} \Phi_2(x_j)\Phi_1(x_j) & \sum_{j=1}^{4} f_j\Phi_1(x_j) \\ \sum_{j=1}^{4} \Phi_1(x_j)\Phi_2(x_j) & \sum_{j=1}^{4} \Phi_2^2(x_j) & \sum_{j=1}^{4} f_j\Phi_2(x_j) \end{array}\right)$$

Construir uma tabela auxiliar

	x_j	f_j	$\Phi_1(x_j)$	$\Phi_2(x_j)$	$\Phi_1^2(x_j)$	$\Phi_2^2(x_j)$	$\Phi_1(x_j)\Phi_2(x_j)$	$f_j\Phi_1(x_j)$	$f_j\Phi_2(x_j)$
	1.5	4.9	0.666667	1.5	0.444444	2.25	1.000001	3.266668	7.35
	2.0	3.3	0.5	2.0	0.25	4	1	1.65	6.6
	3.0	2.0	0.333333	3.0	0.111111	9	0.999999	0.666666	6
	4.0	1.5	0.25	4.0	0.0625	16	1	0.375	6
$\sum$					**0.868055**	**31.25**	**4**	**5.958334**	**25.95**

Passo 3: Resolver o sistema resultante por EGPP

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.868055 & 4 & 5.958334 \\ 4 & 31.25 & 25.95 \end{array}\right) \text{trocar } l_1 \leftrightarrow l_2 \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 31.25 & 25.95 \\ 0.868055 & 4 & 5.958334 \end{array}\right)$$

$m_{21} = -0.217014$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 31.25 & 25.95 \\ 0 & -2.781688 & 0.326821 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 7.405391 \\ c_2 = -0.117490 \end{cases}$$

Passo 4: Construir o modelo

$$\boxed{M(x) = \frac{7.405391}{x} - 0.117490x}$$

(d) Para saber qual dos modelos calculado anteriormente aproxima melhor os dados no sentido dos mínimos quadrados, deve ser calculada a soma do quadrado dos resíduos, para cada modelo (linear polinomial ou não polinomial), e selecionar o que tiver menor valor, ou seja, minimizar $\sum_{j=1}^{m} (f_j - \text{MODELO}_j)^2$

Em que MODELO é qualquer um dos calculados anteriormente:

$$p_1(x) = 2.925 - 1.291525(x - 2.625)$$

$$p_2(x) = 2.925 - 1.291525(x - 2.625) + 0.648241\left[(x - 2.891949)(x - 2.625) - 0.921875\right]$$

$$M(x) = \frac{7.405391}{x} - 0.117490x$$

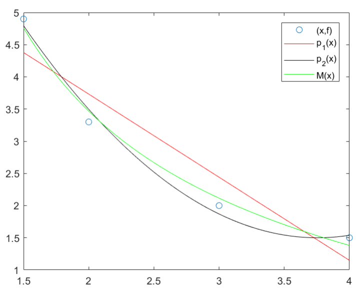
Construir uma tabela auxiliar

x_j	f_j	$p_1(x_j)$	$p_2(x_j)$	$M(x_j)$	$(f_j - p_1(x_j))^2$	$(f_j - p_2(x_j))^2$	$(f_j - M(x_j))^2$
1.5	4.9	4.377966	4.795477	4.760683	0.272519391	0.010924977	0.019409134
2	3.3	3.732203	3.49598	3.4677	0.18679977	0.038408121	0.02812329
3	2	2.440678	1.869347	2.115967	0.19419707	0.017070276	0.013448268
4	1.5	1.149153	1.539196	1.38135	0.123093939	0.001536325	0.014077823
$\sum$					**0.77661017**	**0.0679397**	**0.07505851**

O modelo que aproxima melhor os dados no sentido dos mínimos quadrados é $p_2(x)$, uma vez que é o que apresenta menor soma do quadrado dos resíduos.

Resolução em MatLab

```
clear all
x=[1.5 2.0 3.0 4.0]
f=[4.9 3.3 2.0 1.5]
%a) reta p1(x) =  -1.2915*x + 6.3153
[P1,S1]=polyfit(x,f,1)
S1.normr^2 % dá a soma do quadrado do residuos - erro
%b) parabola p2(x) = 0.6482*x^2 -4.8678*x + 10.6387
[P2,S2] = polyfit(x,f,2)
S2.normr^2 % dá a soma do quadrado do residuos - erro
%c) modelo nao polinomial
[c,RESNORM] = lsqcurvefit(@exerc_42,[1,1],x,f)
RESNORM % dá a soma do quadrado do residuos - erro
% m(x)= 7.4054/x -0.1175*x
%%representacao grafica de p1, p2, m
novo_x=1.5:0.05:4;
novo_P1=polyval(P1,novo_x);
novo_P2=polyval(P2,novo_x);
novo_m=exerc_42(c,novo_x);
plot(x,f,'o',novo_x,novo_P1,'r',novo_x,novo_P2
%funcao
function [ m ] = exerc_42( c,x )
    m=c(1)./x+c(2).*x;
end
```



28. O comprimento de uma barra metálica varia com a temperatura. Numa barra metálica obtiveram-se as seguintes medições

$t(^o$ C)	10	20	30
c(mm)	1003	1010	1015

em que t representa a temperatura e c o comprimento da barra. Nalguns materiais esta variação é linear, sabendo-se que $c(t) = at + b$, em que a e b são constantes. Determine as constantes a e b utilizando a técnica dos mínimos quadrados. Use 6 casas decimais nos cálculos. Calcule uma estimativa do comprimento da barra para a temperatura de 18^o.

Solução Modelo:

$$c(t) = 0.6000\,t + 997.3333$$

Estimativa do comprimento da barra para a temperatura 18º

$$c(18) = 1.0081(mm)$$

. **Resolução em MatLab/Octave**

```
t=[10 20 30]
cm=[1003 1010 1015]
% modelo linear nao polinomial
[c,RESNORM] = lsqcurvefit(@exerc_43,[1,1],t,cm)
RESNORM % dá a soma do quadrado do residuos - erro
% c(t)= 0.6000*t + 997.3333
exerc_43(c,18) %estima o comprimento da barra para t=18º
%%representacao grafica m
novo_x=10:0.05:30;
novo_m=exerc_43(c,novo_x);
plot(t,cm,'o',novo_x,novo_m,'k')
%funcao
function [ m ] = exerc_43( c,t )
    %a->c(1)
    %b->c(2)
    m=c(1).*t+c(2);
end
```

29. Um carro inicia a sua marcha num dia frio de inverno e um aparelho mede o consumo de gasolina verificado no instante em que percorreu x Km. Os resultados obtidos foram:

x (distância em Km)	0	1.25	2.5	3.75	5	6.25
$f(x)$ (consumo em l Km^{-1})	0.260	0.208	0.172	0.145	0.126	0.113

Construa um modelo quadrático, para descrever o consumo de gasolina em função da distância percorrida, usando a técnica dos mínimos quadrados.

Resolução

a) Pretende determinar-se um parábola, que é um polinómio de grau 2 (modelo linear polinomial)

$$p_2(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x)$$

Passo 1: Construir os polinómios ortogonais da sequência de polinómios ortogonais $P_0(x)$, $P_1(x)$ e $P_2(x)$, sabendo que $P_0(x)=1,\ P_{-1}(x)=0$

$$P_1(x) = (x - B_0)P_0(x) - C_0 P_{-1}(x) = x - B_0$$

$$B_0 = \frac{\sum_{j=1}^{6} x_j P_0^2(x_j)}{\sum_{j=1}^{6} P_0^2(x_j)} = \frac{\sum_{j=1}^{6} x_j}{\sum_{j=1}^{6} P_0^2(x_j)}$$

$$P_2(x) = (x - B_1)P_1(x) - C_1 P_0(x) = (x - B_1)P_1(x) - C_1$$

$$B_1 = \frac{\sum_{j=1}^{6} x_j P_1^2(x_j)}{\sum_{j=1}^{6} P_1^2(x_j)} \qquad C_1 = \frac{\sum_{j=1}^{6} P_1^2(x_j)}{\sum_{j=1}^{6} P_0^2(x_j)}$$

Passo 2: Cálculo dos coeficientes do polinómio c_0, c_1 e c_2

$$c_0 = \frac{\sum_{j=1}^{6} f_j P_0(x_j)}{\sum_{j=1}^{6} P_0^2(x_j)} = \frac{\sum_{j=1}^{6} f_j}{\sum_{j=1}^{6} P_0^2(x_j)} \qquad c_1 = \frac{\sum_{j=1}^{6} f_j P_1(x_j)}{\sum_{j=1}^{6} P_1^2(x_j)} \qquad c_2 = \frac{\sum_{j=1}^{6} f_j P_2(x_j)}{\sum_{j=1}^{6} P_2^2(x_j)}$$

Podemos construir uma tabela para auxiliar os cálculos:

	x_j	f_j	$P_0(x_j)$	$x_jP_0(x_j)$	$f_jP_0(x_j)$	$P_1(x_j)$	$f_jP_1(x_j)$	$P_1^2(x_j)$	$x_jP_1^2(x_j)$	$P_2(x_j)$	$P_2^2(x_j)$	$f_jP_2(x_j)$
	0	0.26	1	0	0.26	-3.125	-0.8125	9.765625	0	5.208333	27.12674	1.354167
	1.25	0.208	1	1.25	0.208	-1.875	-0.39	3.515625	4.394531	-1.04167	1.085069	-0.21667
	2.5	0.172	1	2.5	0.172	-0.625	-0.1075	0.390625	0.976563	-4.16667	17.36111	-0.71667
	3.75	0.145	1	3.75	0.145	0.625	0.090625	0.390625	1.464844	-4.16667	17.36111	-0.60417
	5	0.126	1	5	0.126	1.875	0.23625	3.515625	17.57813	-1.04167	1.085069	-0.13125
	6.25	0.113	1	6.25	0.113	3.125	0.353125	9.765625	61.03516	5.208333	27.12674	0.588542
$\sum$	**18.75**	**1.024**	**6**	**18.75**	**1.024**		**-0.63**	**27.344**	**85.449**		**91.146**	**0.274**

B_0	3.125
B_1	3.125
C_1	4.5573

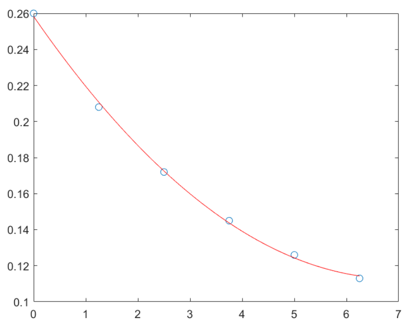
c_0	0.171
c_1	-0.02
c_2	0.003

Passo 3: Construção do polinómio

$$\boxed{p_2(x) = 0.171 - 0.02(x - 3.125) + 0.003\left[(x - 3.125)(x - 3.125) - 4.5573\right]}$$

Resolução em MatLab/Octave

```
x=[0 1.25 2.5 3.75 5 6.25]
f=[0.260 0.208 0.172 0.145 0.126 0.113]
[P2,S2] = polyfit(x,f,2)%P2-coeficientes do polinomio
%P2 = 0.0030*x^2 -0.0418*x + 0.2583
S2.normr^2 %calula a soma do quadrado dos residuos
%calcular P2(3) - consumo para distancia=3?
polyval(P2,3)
%%representacao do polinomio
novo_x=0:0.01:6.25;
novo_f=polyval(P2,novo_x); %avalia o novo_x em p2
plot(x,f,’o’,novo_x,novo_f,’r’)
```



30. Foram efetuadas várias medições do nível de água no Mar do Norte, $H(t)$, para diferentes valores de t conforme a seguinte tabela:

t (horas)	2	4	8	10
$H(t)$ (metros)	1.6	1.4	0.2	0.8

Aproxime a função $H(t)$, no sentido dos mínimos quadrados, por um modelo do tipo

$$M(t; c_1, c_2, c_3) = c_1 + c_2 \text{ sen}\left(\frac{2\pi t}{p}\right) + c_3 \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right).$$

Nota: $p = 12$ horas representa uma aproximação da periodicidade do nível de água.

Solução

Modelo:

$$M(t) = 1 + 0.5774 \,\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{p}\right) + 0.4 \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right)$$

Resolução em MatLab/Octave

```
t=[2 4 8 10];
H=[1.6 1.4 0.2 0.8];
% modelo linear nao polinomial
[c,RESNORM] = lsqcurvefit(@exerc_45,[1,1,1],t,H)
RESNORM % dá a soma do quadrado do residuos - erro
%%representacao grafica m
novo_t=2:0.05:10;
novo_m=exerc_45(c,novo_t);
plot(t,H,'o',novo_t,novo_m,'k')
%funcao
function [m] = exerc_45(c,t)
    m=c(1)+c(2)*sin((2*pi.*t)/12)+c(3)*cos((2*pi.*t)/12);
end
```

31. Um sistema simples de comunicações pode ser representado por um transmissor e um recetor. O transmissor recebe um símbolo, m, e modula o sinal a transmitir, $s_m(t)$, num canal com ruído. O recetor recebe o sinal modulado com o ruído adicionado, $y(t)$, e prevê qual foi o símbolo transmitido. Neste sistema simples suponha que o transmissor apenas transmite dois sinais

$$s_1(t) = 0.2\alpha_1 \text{sen}(20\pi t) + 0.2\beta_1 \text{sen}(22\pi t)$$
$$s_2(t) = 0.2\alpha_2 \text{sen}(20\pi t) + 0.2\beta_2 \cos(20\pi t)$$

(a) Transmitindo o primeiro sinal ($s_1(t)$) e fazendo uma análise ao transmissor observaram-se os seguintes valores:

t_i	0.11	0.52	0.79
s_{1i}	-3.1127	0.0625	3.0351

Determine os valores de α_1 e β_1, no sentido dos mínimos quadrados.

(b) Suponha que $\alpha_1 = -10$, $\beta_1 = -10$, $\alpha_2 = 10$ e $\beta_2 = 10$. Sabendo que o recetor recebeu o sinal indicado na tabela seguinte determine qual foi o sinal transmitido (isto é, aquele que se ajusta melhor ao sinal recebido, no sentido dos mínimos quadrados)

t_i	0.1	0.45	0.63
$y(t_i)$	1.9863	-2.0100	1.2742

Resolução

a) Pretende determinar-se um modelo (modelo linear e não polinomial), no sentido dos mínimos quadrados, do tipo

$$s_1(t) = 0.2\alpha_1 \operatorname{sen}(20\pi t) + 0.2\beta_1 \operatorname{sen}(22\pi t)$$

$$\begin{cases} \Phi_1(t) = 0.2 \operatorname{sen}(20\pi * t) \\ \Phi_2(t) = 0.2 \operatorname{sen}(22\pi * t) \end{cases}$$

Construir uma tabela auxiliar

	t_i	f_i	$\Phi_1(t_i)$	$\Phi_2(t_i)$	$\Phi_1^2(t_i)$	$\Phi_2^2(t_i)$	$\Phi_1(t_i)\Phi_2(t_i)$	$f_i\Phi_1(t_i)$	$f_i\Phi_2(t_i)$
	0.11	-3.1127	0.117557	0.193717	0.01382	0.037526	0.022773	-0.36592	-0.602983
	0.52	0.0625	0.190211	-0.196457	0.03618	0.038595	-0.037368	0.011888	-0.012279
	0.79	3.0351	-0.11756	-0.185955	0.01382	0.034579	0.02186	-0.356797	-0.564393
$\sum$					**0.06382**	**0.1107**	**0.007265**	**-0.710829**	**-1.179655**

Resolver o sistema resultante por EGPP

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.06382 & 0.007265 & -0.710829 \\ 0 & 0.109873 & -1.098737 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -9.999664 \\ \beta_1 = -10.000064 \end{cases}$$

Construir o modelo

$$\boxed{s_1(t) = -0.2 * 9.999664 * \operatorname{sen}(20\pi * t) - 0.2 * 10.000064 * \operatorname{sen}(22\pi * t)}$$

b)

$$\begin{cases} s_1(t) = -2 \operatorname{sen}(20\pi t) - 2 \operatorname{sen}(22\pi t) \\ s_2(t) = 2 \operatorname{sen}(20\pi t) + 2 \cos(20\pi t) \end{cases}$$

	t_i	f_i	$s_1(t_i)$	$s_2(t_i)$	$(f_i - s_1(t_i))^2$	$(f_i - s_2(t_i))^2$
	0.1	1.9863	-1.175571	2	9.997425	0.000188
	0.45	-2.01	0.618034	-2	6.906563	0.0001
	0.63	1.2742	-1.050554	1.284079	5.404483	0.000098
$\sum$					**22.308471**	**0.000386**

O sinal transmitido foi o s_2 porque tem menor soma dos quadrados dos resíduos.

Resolução em MatLab/Octave

```
t=[0.11 0.52 0.79];
s=[-3.1127 0.0625 3.0351];
[c,RESNORM] = lsqcurvefit(@exerc_46,[1,1],t,s)
%%representacao grafica
novo_t=0.11:0.01:0.79;
novo_s=exerc_46(c,novo_t); %avalia os valores de novo_x no modelo
plot(t,s,'o',novo_t,novo_s,'r')  %faz o grafico dos pontos e do modelo
%funcao
function [ m ] = exerc_46( c,t )
    m=0.2*c(1)*sin(20*pi*t)+0.2*c(2)*sin(22*pi*t);
end
```

32. A tabela seguinte contém os registos efetuados dos valores médios da radiação solar numa região de Portugal:

mês (x_i)	J(1)	F(2)	M(3)	A(4)	M(5)	J(6)	J(7)	A(8)	S(9)	O(10)	N(11)	D(12)
Radiação	122	-	188	-	-	270	-	-	-	160	-	120

Ajuste o modelo

$$M(x) = c_1 x + c_2 \text{sen}(x)$$

aos valores da tabela, no sentido dos mínimos quadrados, e use o modelo encontrado para prever a radiação média no mês de Agosto.

Resolução

Pretende determinar-se um modelo (modelo linear e não polinomial), no sentido dos mínimos quadrados, do tipo

$$M(x; c_1, c_2) = c_1 x + c_2 \,\text{sen}(x)$$

para estimar $M(8)$.

Passo 1: $n = 2$. Identificação das funções Φ_i:

$$\Phi_1(x) = x$$

$$\Phi_2(x) = \text{sen}(x)$$

Passo 2: Determinar o sistema de equações normais

$$\left(\begin{array}{cc|c} \sum_{j=1}^{5} \Phi_1^2(x_j) & \sum_{j=1}^{5} \Phi_2(x_j)\Phi_1(x_j) & \sum_{j=1}^{5} f_j \Phi_1(x_j) \\ \sum_{j=1}^{5} \Phi_1(x_j)\Phi_2(x_j) & \sum_{j=1}^{5} \Phi_2^2(x_j) & \sum_{j=1}^{5} f_j \Phi_2(x_j) \end{array} \right)$$

Construir uma tabela auxiliar

	x_j	f_j	$\Phi_1(x_j)$	$\Phi_1^2(x_j)$	$\Phi_2(x_j)$	$\Phi_2^2(x_j)$	$\Phi_1(x_j)\Phi_2(x_j)$	$f_j\Phi_1(x_j)$	$f_j\Phi_2(x_j)$
	1	122	1	1	0.841471	0.708073	0.84147098	122	102.6595
	3	188	3	9	0.14112	0.019915	0.42336002	564	26.53056
	6	270	6	36	−0.27942	0.078073	−1.67649299	1620	−75.4422
	10	160	10	100	−0.54402	0.295959	−5.44021111	1600	−87.0434
	12	120	12	144	−0.53657	0.28791	−6.43887502	1440	−64.3888
$\sum$				**290**		**1.38993**	**-12.29075**	**5346**	**-97.68429**

Passo 3: Resolver o sistema resultante por EGPP

$$\left(\begin{array}{rr|r} 290 & -12.29075 & 5346 \\ -12.29075 & 1.38993 & -97.68429 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 24.72035 \\ c_2 = 148.31492 \end{cases}$$

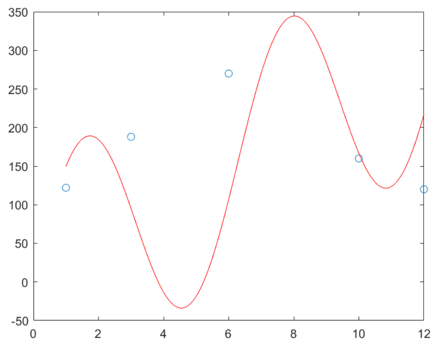
Passo 4: Construir o modelo

$$\boxed{M(x) = 24.72035x + 148.3149\,\mathrm{sen}(x)}$$

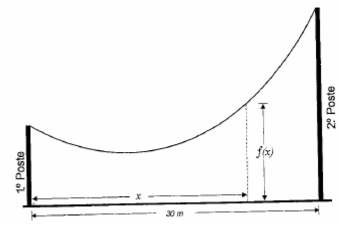
O valor da radiação no mês de agosto é $M(8) = 344.49939$.

Resolução em MatLab/Octave

```
clear all
x=[1 3 6 10 12]
f=[122 188 270 160 120]
[c,RESNORM] = lsqcurvefit(@exerc_47,[1,1],x,f)
%c1 = 24.7203  c2 = 148.3147
%m = 24.7203*x + 148.3147*sen(x)
%RESNORM - soma do quadrado dos residuos (erro) =4.5461e+04
exerc_47(c,8)  %estima a radiacao no mes de agosto
%representacao grafica
novo_x=1:0.05:12;
novo_f=exerc_47(c,novo_x); %avalia os valores de novo_x no modelo
plot(x,f,'o',novo_x,novo_f,'r')  %faz o grafico dos pontos e do modelo
%funcao
function [ m ] = exerc_47( c,x )
    m=c(1).*x+c(2).*sin(x);
end
```



33. Um fio está suspenso entre dois postes. A distância entre os postes é de 30 metros. A distância do fio ao solo $f(x)$, em metros, depende de x como mostra a figura. A tabela mostra 5 valores conhecidos de f.



x_i	0	8	12	16	20
$f(x_i)$	15.43	10.2	10.2	11.86	15.43

(a) Calcule a parábola que melhor se ajusta aos valores de $f(x_i)$ e determine a distância do fio ao solo quando $x = 10$.

(b) A partir da parábola da alínea anterior, verifique se $x = 10$ é o ponto em que a distância do fio ao solo é mínima.

(c) Determine o polinómio de grau 3 que melhor se ajusta aos valores de $f(x_i)$.

(d) Determine os coeficientes c_1 e c_2 do modelo

$$M(x; c_1, c_2) = c_1 e^{1-0.1x} + c_2 e^{0.1x-1}$$

que melhor se ajusta à função $f(x)$ de acordo com

$$min_{c_1,c_2} \sum_{i=1}^{5} (f(x_i) - M(x_i; c_1, c_2))^2.$$

(e) Qual dos modelos anteriormente determinados escolheria para ajustar a distância do fio ao solo. Justifique.

Solução

(a)

$$p_2(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x)$$

Assim o polinómio obtido é:

$$p_2(x) = 12.624 - 0.019358(x - 11.2) + 0.054579[(x - 8.475676)(x - 11.2) - 47.36]$$

A distância do fio ao solo quando $x = 10$ é:

$$f(10) \approx p_2(10) = 9.962539$$

(b) A distancia do fio ao solo é mínima quando a derivada do polinómio é igual a 0.

$$p_2'(x) = 0.109158x - 1.09323$$

$$p_2'(x) = 0 \Rightarrow x = 10.015116 \approx 10$$

$$p_2''(x) = 0.109158 > 0$$

então $x = 10$ é mínimo

(d)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9.98773 & 5 & 74.93774 \\ 5 & 13.00665 & 90.03916 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 4.9996 \\ c_2 = 5.0006 \end{cases}$$

Construir o modelo

$$\boxed{M(x) = 4.9996e^{1-0.1x} + 5.0006e^{0.1x-1}}$$

(e) O modelo da alínea d) pois é aquele que apresenta menor resíduo.

Resolução em MatLab/Octave

```
clear all
x = [0 8 12 16 20];
y = [15.43 10.2 10.2 11.86 15.43];
%%Parábola é um polinómio de grau 2
[p2,S2] = polyfit(x,y,2)
%S.normr^2
%Calcular o valor de p2 para x=10
distancia=polyval(p2,10)
%%Polinómio de grau 3
[p3,S3] = polyfit(x,y,3)
%%Coeficientes do modelo
x0=[1 1];
[m,S] = lsqcurvefit(@exerc_48,x0,x,y)
%%e)
SQR2=S2.normr^2
SQR3=S3.normr^2
SQRM=S
%%Gráfico
newx = 0:0.1:20;
newy2 = polyval(p2,newx);
newy3 = polyval(p3,newx);
newym = exerc_48(m,newx);
plot(x,y,'o',newx,newy2,'m',newx,newy3,'r',newx,newym,'g');
grid;
legend('pontos','p_2(x)','p_3(x)','m(x)')
%funcao
function f = exerc_48(c,x)
    f=c(1)*exp(1-0.1*x)+c(2)*exp(0.1*x-1);
end
```

34. Em sistemas de transportes urbanos, o preço das viagens depende da procura. Quanto maior é a procura, x, mais baixo é o preço, $P(x)$ (em euros). Os registos obtidos nos últimos 4 meses foram:

x_i	30	35	45	50
$P(x_i)$	12	12	10	8

Pretende-se construir um modelo que descreva o comportamento de P em função de x. Com base no modelo $M(x)$

$$M(x; c_1, c_2) = c_1 x + c_2 e^{-x},$$

determine c_1 e c_2 no sentido dos mínimos quadrados.

Resolução

Pretende determinar-se um modelo (modelo linear e não polinomial), no sentido dos mínimos quadrados, do tipo

$$M(x; c_1, c_2) = c_1 x + c_2 e^{-x}$$

para estimar $M(8)$.

Passo 1: $n = 2$. Identificação das funções Φ_i:

$$\Phi_1(x) = x \qquad \Phi_2(x) = e^{-x}$$

Passo 2: Determinar o sistema de equações normais

$$\left(\begin{array}{cc|c} \sum_{j=1}^{4} \Phi_1^2(x_j) & \sum_{j=1}^{4} \Phi_2(x_j)\Phi_1(x_j) & \sum_{j=1}^{4} f_j \Phi_1(x_j) \\ \sum_{j=1}^{4} \Phi_1(x_j)\Phi_2(x_j) & \sum_{j=1}^{4} \Phi_2^2(x_j) & \sum_{j=1}^{4} f_j \Phi_2(x_j) \end{array}\right)$$

Passo 3: Resolver o sistema resultante por EGPP

$$\left(\begin{array}{rr|r} 6650 & 2.82936E-12 & 1630 \\ 2.82936E-12 & 8.75691E-27 & 1.13048E-12 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0.2205 \\ c_2 = 5.7854E+13 \end{cases}$$

Passo 4: Construir o modelo

$$\boxed{M(x) = 0.2205x + 5.7854 \times 10^{+13}\, e^{-x}}$$

Resolução em MatLab/Octave

```
clear all
x = [30 35 45 50];
y = [12 12 10 8];
%%Coeficientes do modelo
x0=[1 1];
[c,S] = lsqcurvefit(@exerc_49,x0,x,y)
function f = exerc_49(c,x)
    f=c(1)*x+c(2)*exp(-x);
end
```

35. A pressão máxima, P, em Kg/mm^2 que um cabo metálico suporta em função do seu diâmetro pode ser modelado de acordo com

$$P(d) = c_1 d^2 + c_2 \ln(d)$$

em que d é o diâmetro em mm. Foram realizadas três experiências cujos resultados se encontram na tabela

d_i (mm)	0.239212	0.239215	0.239221
P_i (Kg/mm^2)	a	0.00020	0.00030

Pretende-se calcular os coeficientes c_1 e c_2 de modo a que o modelo se aproxime dos valores da tabela no sentido dos mínimos quadrados.

(a) Apresente o sistema das equações normais em função de a. Use 6 casas decimais nos cálculos.

(b) Para $a = 0.00015$, determine c_1 e c_2.

Solução

(a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.0098239 & -0.24556 & 0.057222a + 2.8613e-5 \\ -0.24556 & 6.138 & -1.4304a - 7.15189e-4 \end{array}\right)$$

(b) Modelo:

$$\boxed{P(d) = 25.813904\, d^2 + 1.032563\, \ln(d)}$$

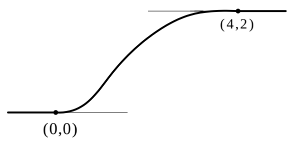
Resolução em MatLab/Octave

```
%%b)
clear all
d=[0.239212 0.239215  0.239221];
p=[0.00015 0.00020   0.00030];
[c,RESNORM] = lsqcurvefit(@fun,[20,1],d,p)
% P(d)=10.9843*d^2 + 0.4393*ln(d);
%%representacao grafica
novo_d=0.239212:0.001:0.239221;
novo_p=exerc_50(c,novo_d); %avalia os valores de novo_x no modelo
plot(d,p,'o',novo_d,novo_p,'r')  %faz o grafico dos pontos e do modelo
%funcao
function P=fun(c,d)
    P=c(1).*d.^2 + c(2).*log(d);
end
```

Interpolação *Spline*

36. Considere um desvio entre duas linhas de caminho de ferro paralelas.

O desvio agora deve corresponder a um polinómio de grau três que une os pontos $(0, 0)$ e $(4, 2)$, como mostra a figura.



Com base nos quatro pontos da tabela

x_i	-1	0	4	5
$f_i = f(x_i)$	0.4375	0	2	1.5625

construa a *spline* cúbica natural que descreve a trajetória desenhada e calcule $f(2)$.

Resolução

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	4	5
f_i	0.4375	0	2	1.5625
	extremo inferior	ponto interior	ponto interior	extremo superior

Como pretendemos determinar uma *spline* cúbica natural, então a curvatura nos extremos é nula, ou seja, $M_0 = 0$ e $M_3 = 0$ e apenas se constroem as equações para os pontos interiores ($i = 1$ e $i = 2$).

- Expressão para o ponto $i = 1$

  $(x_1 - x_0)M_0 + 2(x_2 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 = \frac{6}{(x_2-x_1)}(f_2 - f_1) - \frac{6}{(x_1-x_0)}(f_1 - f_0)$

  Simplificando

  $10M_1 + 4M_2 = 5.625$

- Expressão para o ponto $i = 2$

  $(x_2 - x_1)M_1 + 2(x_3 - x_1)M_2 + (x_3 - x_2)M_3 = \frac{6}{(x_3-x_2)}(f_3 - f_2) - \frac{6}{(x_2-x_1)}(f_2 - f_1)$

  Simplificando

  $4M_1 + 10M_2 = -5.625$

O sistema resultante é

$$\begin{cases} 10M_1 + 4M_2 = 5.625 \\ 4M_1 + 10M_2 = -5.625 \end{cases} \iff \text{por EGPP} \iff \begin{cases} M_1 = 0.935 \\ M_2 = -0.935 \end{cases}$$

Como queremos estimar o valor de $f(2)$ através de uma *spline* natural, então verificamos que o ponto 2 encontra-se entre o ponto $x = 0$ e $x = 4$ (ver tabela). Uma vez que temos um segmento $i = 0, 1, 2, \ldots$ de spline entre cada 2 pontos, então o ponto $x = 2$ localiza-se no 2^o segmento, ou seja no intervalo [0,4].

Seguidamente, constrói-se expressão do segmento $i = 2$ da *spline* cúbica

$$s_3^2(x) = \frac{M_1}{6(x_2 - x_1)}(x_2 - x)^3 + \frac{M_2}{6(x_2 - x_1)}(x - x_1)^3 + \left[\frac{f_1}{(x_2 - x_1)} - \frac{M_1(x_2 - x_1)}{6}\right](x_2 - x) + \left[\frac{f_2}{(x_2 - x_1)} - \frac{M_2(x_2 - x_1)}{6}\right](x - x_1)$$

Substituindo valores e simplificando

$s_3^2(x) = 0.0390625(4 - x)^3 - 0.0390625x^3 - 0.625(4 - x) + 1.125x$

$f(2) \approx s_3^2(2) = 1.$

37. Ao efetuar observações astronómicas medindo as variações na magnitude aparente, M, de uma estrela variável chamada *variável Cepheid*, ao longo de um período de tempo, t, foram obtidos os seguintes valores:

tempo (t)	0.0	0.3	0.5	0.6	0.8
Magnitude aparente (M)	0.302	0.106	0.240	0.579	0.468

Seja $s(t)$ a *spline* cúbica natural, interpoladora da função tabelada. Determine um valor aproximado (dado pela função *spline*) da magnitude aparente da *variável Cepheid* no instante $t = 0.4$.

Resolução

Como pretendemos determinar uma *spline* natural, então a curvatura nos extremos é nula, ou seja, $M_0 = 0$ e $M_4 = 0$ e apenas se constroem as equações para os pontos interiores ($i = 1$, $i = 2$ e $i = 3$).

O sistema resultante é dado por

$$\begin{cases} M_1 + 0.2M_2 = 7.9400 \\ 0.2M_1 + 0.6M_2 + 0.1M_3 = 16.32 \\ 0.1M_2 + 0.6M_3 = -23.67 \end{cases} \iff \text{por EGPP} \iff \begin{cases} M_1 = 1.0650 \\ M_2 = 34.3748 \\ M_3 = -45.1791 \end{cases}$$

A expressão para o 2^o segmento $i = 2$ da *spline* cúbica é dado por

$s_3^{(2)}(x) = 0.8875(0.5 - x)^3 + 28.6457(x - 0.3)^3 + 0.4945(0.5 - x) + 0.0542(x - 0.3)$

$s_{(2)}^3(0.4) = 0.0844$

38. Os dados da tabela representam os pesos e as alturas de uma amostra de quatro crianças:

x (Altura (cm))	80	95	110	115
$f(x)$ (Peso (Kg))	9	15	20	24

.

(a) Estime o peso de uma criança com altura de 100 cm usando uma *spline* cúbica, cuja curvatura nos extremos é dada por: $s_3^1{''}(80) = 0.25$ e $s_3^n{''}(115) = 0.55$.

(b) Determine o erro de truncatura cometido na alínea anterior, supondo que uma criança com 120 cm pesa 25 Kg.

Resolução

(a) A *spline* é cúbica completa, com

$$s_3^{1\prime\prime}(80) = 0.254 \iff M_0 = 0.254$$

$$s_3^{n\prime\prime}(115) = 0.55 \iff M_3 = 0.55$$

Basta escrever as equações para os pontos interiores ($i = 1$ e $i = 2$) para determinar M_1 e M_2.

O sistema resultante é dado por

$$\begin{cases} 15M_0 + 60M_1 + 15M_2 = 2 - 2.4 \\ 15M_1 + 40M_2 + 5M_3 = 4.8 - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 60M_1 + 15M_2 = -4.15 \\ 15M_1 + 40M_2 = 0.05 \end{cases} \iff \text{EGPP} \iff \begin{cases} M_1 = -0.0767 \\ M_2 = 0.03 \end{cases}$$

A expressão para o 2^o segmento $i = 2$ da *spline* cúbica é dado por

$$s_3^2(x) = -0.000852(110 - x)^3 + 0.00033(x - 95)^3 + 1.1918(110 - x) + 1.2583(x - 95)$$

$$s_3^2(100) = 17.398$$

(b) O erro de truncatura da *spline* cúbica é dado por

$$|f(x) - s_3(x)| \leq \frac{5}{384} 15^4 \times |-0.0001| \times 4! = 1.5820$$

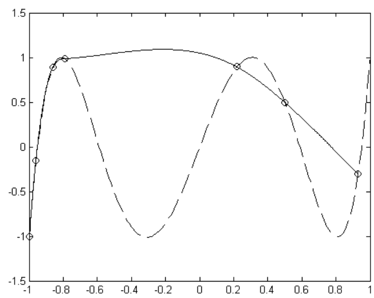
em que

$h = \max(15, 15, 5) = 15$ e $M_4 = |-0.0001| \times 4!$.

39. A partir de uma experiência foram obtidos os seguintes valores de y em função da variável t:

t_i	-1	-0.96	-0.86	-0.79	0.22	0.5	0.93
y_i	-1	-0.151	0.894	0.986	0.895	0.5	-0.306

Foram calculados dois modelos, $M_1(t)$ baseado numa *spline* cúbica e $M_2(t)$ baseado num polinómio interpolador de Newton, para aproximar os dados, e que estão representados na figura. Diga, justificando, a que modelo corresponde cada uma das linhas - a linha contínua e a linha a tracejado.



Resolução

M_1 corresponde à linha a cheio, uma vez que é formado por polinómios de grau 3 em cada segmento.

M_2 é um polinómio interpolador de Newton de grau 6, que corresponde à linha a tracejado.

40. A seguinte função segmentada $s_3(x)$ no intervalo $[0,3]$, representa o lucro obtido na venda de um produto sazonal. No 1º mês de vendas, o lucro é representado por $s_3^1(x)$ e no 2º e 3º meses é descrito por $s_3^2(x)$. Poderá a função segmentada $s_3(x)$ representar uma *spline* cúbica? Justifique.

$$s_3(x) = \begin{cases} s_3^1(x) = 3x^3 - x^2 + x - 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^2(x) = 2x^3 + 2x - 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Resolução

Para que a função dada seja uma *spline*, os valores da função, no ponto interior ($x = 1$), devem ser idênticos, bem como os valores da primeira e segunda derivadas (continuidade até à 2^a ordem). Ou seja, em $x = 1$ deve verificar-se

$$s_3^1(1) = s_3^2(1), \; s_3^{1'}(1) = s_3^{2'}(1), \; s_3^{1''}(1) = s_3^{2''}(1)$$

A função tem o mesmo valor para $x = 1$

$$s_3^1(1) = s_3^2(1) \quad \longleftrightarrow \quad 1 = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK}$$

Analisar a continuidade da primeira derivada de $s_3(x)$ no ponto $x = 1$. A expressão da primeira derivada é dada por:

$$s_3'(x) = \begin{cases} s_3^{1'}(x) = & 9x^2 - 2x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^{2'}(x) = & 6x^2 + 2, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$s_3^{1'}(1) = s_3^{2'}(1) \quad \longleftrightarrow \quad 8 = 8 \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK}$$

Analisar a continuidade da segunda derivada de $S_3(x)$. A expressão da segunda derivada é:

$$s_3''(x) = \begin{cases} s_3^{1''}(x) = & 18x - 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^{2''}(x) = & 12x, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$s_3^{1''}(1) \neq s_3^{2''}(1) \quad \longleftrightarrow \quad 16 \neq 12$$

A segunda derivada de $s_3(x)$ tem valores diferentes para $x = 1$ em cada um dos segmentos. Por isso, conclui-se que $s_3(x)$ não pode representar uma *spline*.

41. Num certo campeonato regional de futebol há 7 equipas. No fim da temporada, o número de pontos ganhos e o número de golos sofridos por 6 das equipas estão representados na tabela

Equipa	F.C.Sol	F.C.Lá	S.C.Gato	Nova F.C.	Vila F.C.	F.C.Chão
N^o pontos, x_i	10	12	18	27	30	34
N^o golos, $f(x_i)$	20	18	15	9	12	10

(a) Use uma *spline* cúbica completa para descrever a relação entre o número de pontos e o número de golos sofridos pelas equipas no campeonato. Sabendo que a 7^a equipa terminou o campeonato com 29 pontos, estime o número de golos que terá sofrido.

(b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido na alínea anterior.

Resolução

(a) Como é pedido para calcular *spline* cúbica completa vamos averiguar que informações deram.

- É conhecida uma expressão analítica que represente a função?

- É conhecida uma expressão analítica que represente a derivada da função?

- Temos informação sobre a derivada da função nos pontos extremos da tabela de pontos dada?

Como não é conhecida uma expressão analítica que represente a função ou a sua derivada, ou o valor da derivada da função nos extremos da tabela, então vamos "guardar"(ou retirar) o segundo ($A = (12, 18)$) e penúltimo ($B = (30, 12)$) pontos da tabela, uma vez que serão usados como pontos auxiliares para calcular uma aproximação às derivadas nos extremos (por diferenças divididas). Assim,

$$f'_0 = \frac{20 - 18}{10 - 12} = -1 \qquad\qquad f'_n = \frac{12 - 10}{30 - 34} = -0.5$$

A tabela para o cálculo da *spline* cúbica completa conta agora com 4 pontos ($n = 3$), sendo 2 pontos interiores e 2 pontos extremos:

Equipa	F.C.Sol	S.C.Gato	Nova F.C.	F.C.Chão
N^o pontos, x_i	10	18	27	34
N^o golos, $f(x_i)$	20	15	9	10

- Expressão para o ponto extremo inferior nó 0, $i = 0$

  $2(x_1 - x_0)M_0 + (x_1 - x_0)M_1 = \frac{6}{(x_1 - x_0)}(f_1 - f_0) - 6f'_0$
- Expressão para o ponto interior $i = 1$

  $(x_1 - x_0)M_0 + 2(x_2 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 = \frac{6}{(x_2 - x_1)}(f_2 - f_1) - \frac{6}{(x_1 - x_0)}(f_1 - f_0)$
- Expressão para o ponto interior $i = 2$

  $(x_2 - x_1)M_1 + 2(x_3 - x_1)M_2 + (x_3 - x_2)M_3 = \frac{6}{(x_3 - x_2)}(f_3 - f_2) - \frac{6}{(x_2 - x_1)}(f_2 - f_1)$
- Expressão para o ponto extremo superior nó n, $i = 3$, $n = 3$

  $2(x_3 - x_2)M_3 + (x_3 - x_2)M_2 = 6f'_3 - \frac{6}{(x_3 - x_2)}(f_3 - f_2)$

Simplificando as expressões, o sistema resultante é

$$\begin{cases} 16M_0 + 8M_1 = 2.25 \\ 8M_0 + 34M_1 + 9M_2 = -0.25 \\ 9M_1 + 32M_2 + 7M_3 = 4.8571 \\ 7M_2 + 14M_3 = -3.8571 \end{cases} \iff \text{por EGPP} \iff \begin{cases} M_0 = 0.2054 \\ M_1 = -0.1295 \\ M_2 = 0.2790 \\ M_3 = -0.4150 \end{cases}$$

Para estimar o número de golos da equipa que tem 29 pontos através de uma *spline* cúbica completa, então verificamos que o ponto 29 encontra-se entre o ponto $x = 27$ e $x = 34$ (ver tabela após "guardar" pontos), o que significa que $f(29)$ vai ser aproximado pelo 3^o segmento da *spline*.

Seguidamente, constrói-se a expressão do 3^o segmento ($i = 3$) da *spline* cúbica

$$s_3^3(x) = \frac{M_2}{6(x_3 - x_2)}(x_3-x)^3+\frac{M_3}{6(x_3 - x_2)}(x-x_2)^3+\left[\frac{f_2}{(x_3 - x_2)} - \frac{M_2(x_3 - x_2)}{6}\right](x_3-x)+\left[\frac{f_3}{(x_3 - x_2)} - \frac{M_3(x_3 - x_2)}{6}\right](x-x_2)$$

Substituindo valores e simplificando

$s_3^3(x) = 0.0066(34 - x)^3 - 0.0099(x - 27)^3 + 0.9602(34 - x) + 1.9128(x - 27)$

$f(29) \approx s_3^3(29) = 9.3779$

A equipa terá sofrido 9 golos aproximadamente.

(b) O erro de truncatura da *spline* cúbica é dado por

$$|f(x) - s_3(x)| \leq \frac{5}{384}h^4 M_4$$

- $h = \max_{0 \leq i \leq 2}(x_{i+1} - x_i) \Longrightarrow h = \max(18 - 10, 27 - 18, 34 - 27) = \max(8, 9, 7) = 9$
- $M_4 \geq \max_{\xi \in [10,34]} |f^{(iv)}(\xi)|$ é o majorante da quarta derivada da função.

  Como a expressão da função não é conhecida, vamos construir a tabela das diferenças divididas para calcular uma aproximação ao majorante da quarta derivada baseada na dd4.

  $$M_4 \geq \max_{\xi \in [10,34]} |f^{(iv)}(\xi)| = \max(|dd4|) \times 4!$$

  Neste caso, devem usar-se todos os pontos da tabela dada inicialmente.

x	f	dd1	dd2	dd3	dd4
10	20				
		-1.0000			
12	18		0.0625		
		-0.5000		-0.0043	
18	15		-0.0111		0.0006
		-0.6667		0.0083	
27	9		0.1389		-0.0014
		1.0000		-0.0221	
30	12		-0.2143		
		-0.5000			
34	10				

  O majorante da quarta derivada é a dd4 de maior valor absoluto multiplicada por 4 fatorial, $M_4 = |-0.0014| \times 4!$

Erro de truncatura *spline* cúbica

$$|f(x) - s_3(x)| \leq \frac{5}{384}9^4 \times 0.0014 \times 4! = 2.8335$$

Resolução em Matlab/Octave

```
x=[10 12 18 27 30 34];
y=[20 18 15  9 12 10];

%%spline cubica completa
%guardar 2 e penultimo pontos para estimar f'0 e f'n
xx=[10 18 27 34];
yy=[20 15  9 10];
f_linha_0=(20-18)/(10-12);
f_linha_n=(12-10)/(30-34);
s_completa = spline(xx, [f_linha_0 yy f_linha_n]);

%para ver os segmentos da spline, fazer:
s_completa.coefs
%a 1ª linha corresponde aos coefcientes do segmento 1 entre [10,18]
s^1_3(x) = -0.0070(x-10)^3 + 0.1027(x-10)^2 -1.0000(x-10) + 20  %para x [10,18]
s^2_3(x) =  0.0076(x-18)^3 -0.0648(x-18)^2 -0.6966(x-18) + 15   %para x [18,27]
s^3_3(x) = -0.0165(x-27)^3 + 0.1395(x-27)^2 -0.0240(x-27) + 9   %para x [27,34]

%para calcular o valor de s(29), fazer:
s_29 = spline(xx, [f_linha_0 yy f_linha_n],29) %s_3(29)

%% representacao grafica
novo_x=10:0.1:34;
novo_y=spline(xx, [f_linha_0 yy f_linha_n],novo_x);
plot (x,y,'o',novo_x,novo_y,'r');
```

42. A resistência de um certo fio de metal, $f(x)$, varia com o diâmetro desse fio, x. Foram medidas as resistências de 6 fios de diversos diâmetros:

x_i	1.5	2.0	2.2	3.0	3.8	4.0
$f(x_i)$	4.9	3.3	3.0	2.0	1.75	1.5

Como se pretende estimar a resistência de um fio de diâmetro 1.75, use uma *spline* cúbica natural para calcular esta aproximação.

Resolução

Como pretendemos determinar uma *spline* natural, então a curvatura nos extremos é nula, ou seja, $M_0 = 0$ e $M_5 = 0$ e apenas se constroem as equações para os pontos interiores ($i = 1, 2, 3, 4$).

O sistema resultante é dado por

$$\begin{cases} 1.4M_1 + 0.2M_2 = 10.2 \\ 0.2M_1 + 2M_2 + 0.8M_3 = 1.5 \\ 0.8M_2 + 3.2M_3 + 0.8M_4 = 5.625 \\ 0.8M_3 + 2M_4 = -5.625 \end{cases} \iff \text{por EGPP} \iff \begin{cases} M_1 = 7.4609 \\ M_2 = -1.2261 \\ M_3 = 3.0749 \\ M_4 = -4.0425 \end{cases}$$

A expressão para o 1^o segmento ($i = 1$) da *spline* cúbica natural é dado por

$s_3^1(x) = 2.4870(x - 1.5)^3 + 9.8(2 - x) + 5.9783(x - 1.5)$

$f(1.75) \approx s_3^1(1.75) = 3.9834.$

43. Um braço de um robô deve passar nos instantes t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5 por posições pré-definidas $\theta(t_0), \theta(t_1), \theta(t_2), \theta(t_3), \theta(t_4)$ e $\theta(t_5)$, onde $\theta(t)$ é o ângulo (em radianos) que o braço do robô faz com o eixo dos X's.

t_i	1	2	3	4	5	6
$\theta_i = \theta(t_i)$	1	1.25	1.75	2.25	3	3.15

(a) Com base nos dados da tabela, aproxime a trajetória do robô por uma *spline* cúbica completa. Indique também uma aproximação da posição do robô no instante $t = 1.5$.

(b) Calcule uma aproximação à velocidade do robô no instante $t = 1.5$

(c) Calcule um limite superior do erro de truncatura que se comete quando se usa a derivada da *spline* calculada para aproximar a velocidade do robô.

Resolução

(a) Como pretendemos determinar uma *spline* cúbica completa, então vamos averiguar que dados temos disponíveis.

- É conhecida uma expressão analítica que represente a função?

- É conhecida uma expressão analítica que represente a derivada da função?

- Temos informação sobre a derivada da função nos pontos extremos da tabela de pontos dada?

Como não temos nenhuma destas informações, então vamos "guardar"(ou retirar) o segundo ($A = (2, 1.25)$) e penúltimo ($B = (5, 3)$) pontos da tabela, uma vez que serão usados como pontos auxiliares para calcular uma aproximação às derivadas nos extremos (por diferenças divididas). Assim,

$$f'_0 = \frac{1 - 1.25}{1 - 2} = 0.25 \qquad f'_n = \frac{3 - 3.15}{5 - 6} = 0.15.$$

Restam 4 pontos ($n = 3$), sendo 2 deles os extremos e 2 pontos interiores.

A tabela para construir a *spline* cúbica completa é:

t_i	1	3	4	6
θ_i	1	1.75	2.25	3.15

Vamos construir as equações para o extremo inferior ($i = 0$), para o extremo superior ($i = 3$) e para os pontos interiores ($i = 1, 2$). O sistema resultante é dado por

$$\begin{cases} 4M_0 + 2M_1 = 0.75 \\ 2M_0 + 6M_1 + M_2 = 0.75 \\ M_1 + 6M_2 + 2M_3 = -0.3 \\ 2M_2 + 4M_3 = -1.8 \end{cases} \Longleftrightarrow \text{ por EGPP } \Longleftrightarrow \begin{cases} M_0 = 0.1609 \\ M_1 = 0.0531 \\ M_2 = 0.1094 \\ M_3 = -0.5047 \end{cases}$$

Para a seleção do segmento da *spline*, precisamos verificar onde se situa o ponto interpolador: o ponto 1.5 pertence ao segmento entre [1,3], logo vamos construir a expressão para o 1^o segmento $i = 1$ da *spline* cúbica.

Após simplificação, a expressão da *spline* cúbica do 1^o segmento é dada por

$s_3^1(t) = 0.01340(3-t)^3 + 0.0044(t-1)^3 + 0.4464(3-t) + 0.8573(t-1)$

$\theta(1.5) \approx s_3^1(1.5) = 1.1440.$

(b) O cálculo da velocidade é aproximado pela derivada da *spline*, $v(t) \approx s_3^{1\prime}(t)$.

$s_3^{1\prime}(t) = -0.0402(3-t)^2 - 0.0133(t-1)^2 + 0.4109$

$v(1.5) \approx s_3^{1\prime}(1.5) = -0.3171$

(c) O erro de truncatura da derivada da *spline* cúbica é dado por $|f'(x) - s_3'(x)| \leq \frac{1}{24}h^3 M_4$, com

- $h = \max_{0 \leq i \leq 2}(x_{i+1} - x_i)$
  $h = \max(3-1, 4-3, 6-4) = \max(2, 1, 2) = 2$
- $M_4 \geq \max_{\xi \in [1,6]} |f^{(iv)}(\xi)$ é o majorante da quarta derivada da função.

  Como a expressão da função não é conhecida, vamos construir a tabela das diferenças divididas para calcular uma aproximação ao majorante da quarta derivada (através da dd4).

$$M_4 \geq \max_{\xi \in [1,6]} |f^{(iv)}(\xi)| = \max(|dd4|) \times 4$$

  Neste caso, devem usar-se todos os pontos da tabela dada inicialmente.

t	teta	dd1	dd2	dd3	dd4
1	1				
		0.25			
2	1.25		0.125		
		0.5		-0.04167	
3	1.75		0		0.02083
		0.5		0.04167	
4	2.25		0.125		-0.04583
		0.75		-0.14167	
5	3		-0.3		
		0.15			
6	3.15				

O majorante da quarta derivada é $M_4 = |-0.04583| \times 4!$

Erro de truncatura da derivada da *spline* cúbica

$$|f'(t) - s_3'(t)| \leq \frac{1}{24} \times 2^3 \times |-0.04583| \times 4! = 0.36664$$

Resolução em Matlab/Octave

```
x=[1    2   3   4    5    6];
y=[1   1.25   1.75   2.25   3   3.15];
%% spline cubica completa
%guardar 2 e penultimo pontos para estimar f'0 e f'n
xx=[1   3   4    6];
yy=[1   1.75   2.25   3.15];
f_linha_0=(1.25-1)/(2-1);
f_linha_n=(3.15-3)/(6-5);
s_completa = spline(xx, [f_linha_0 yy f_linha_n]);
s_completa.coefs % mostra os segmento da spline
% s^1_3(x)=-0.0089844(x-1)^3 + 0.0804688(x-1)^2 + 0.2500000(x-1) + 1.00 % x [1,3]
% s^2_3(x)=0.0093750(x-3)^3 + 0.0265625(x-3)^2 + 0.4640625(x-3) + 1.75 % x [3,4]
% s^3_3(x)=-0.0511719(x-4)^3 + 0.0546875(x-4)^2 + 0.5453125(x-4) + 2.25 % x [4,6]
s_1_5 = spline(xx, [f_linha_0 yy f_linha_n],1.5) %s_3(1.5)
%% representacao grafica
novo_x=1:0.1:6;
novo_y=spline(xx, [f_linha_0 yy f_linha_n],novo_x);
plot (x,y,'o',novo_x,novo_y,'r');
```

44. Considere as duas seguintes funções *spline* cúbicas:

$$S_3(x) = \begin{cases} -x+5, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3.75x^3 - 11.25x^2 + 10.25x + 1.25, & 1 \leq x \leq 3 \\ -3.75x^3 + 56.25x^2 - 192.25x + 203.75, & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

e

$$R_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5, \qquad 0 \leq x \leq 5$$

e a tabela da função $f(x)$:

x_i	0	1	3	5
$f(x_i)$	5	4	32	180
$f'(x_i)$	0	–	–	120

Verifique se alguma das duas funções $S_3(x)$ e $R_3(x)$, corresponde a uma *spline* cúbica, interpoladora de $f(x)$ nos pontos da tabela dada.

Resolução

Para que a função dada seja uma *spline* cúbica, então os valores da função, para cada um dos ramos, nos pontos interiores ($x = 1$ e $x = 3$), devem ser idênticos, bem como os valores da primeira e segunda derivadas (continuidade até à 2^a ordem).

(a) Vamos começar por analisar estas propriedades para a função $R_3(x)$:

- $R_3(x)$ é um polinómio (de 3^o grau), logo é uma função contínua e corresponde a uma *spline* cúbica.
- Falta verificar se é a *spline* cúbica interpoladora de $f(x)$ nos pontos da tabela.

$$\begin{cases} R_3(0) = 5 = f(0) \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK} \\ R_3(1) = 4 = f(1) \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK} \\ R_3(3) = 32 = f(3) \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK} \\ R_3(5) = 180 = f(5) \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK} \end{cases}$$

Conclui-se que $R_3(x)$ é a *spline* cúbica interpoladora de $f(x)$ nos pontos da tabela.

(b) Vamos agora analisar as propriedades da função $S_3(x)$:

$$S_3(x) = \begin{cases} S_3^1(x) = & -x + 5, & 0 \leq x \leq 1 \\ S_3^2(x) = & 3.75x^3 - 11.25x^2 + 10.25x + 1.25, & 1 \leq x \leq 3 \\ S_3^3(x) = & -3.75x^3 + 56.25x^2 - 192.25x + 203.75, & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

- Uma vez que a função é dada por ramos, então é preciso analisar a continuidade de $S_3(x)$ nos pontos interiores, ou seja, confirmar a igualdade de valores em $S_3(1)$ e $S_3(3)$.

$$\begin{cases} S_3^1(1) = S_3^2(1) \quad \longleftrightarrow \quad 4 = 4 = f((1) \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK} \\ S_3^2(3) = S_3^3(3) \quad \longleftrightarrow \quad 32 = 32 = f(3) \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK} \end{cases}$$

- Analisar a continuidade da primeira derivada de $S_3(x)$ nos pontos interiores. A expressão da primeira derivada é dada por:

$$S_3'(x) = \begin{cases} S_3^{1'}(x) = & -1, & 0 \leq x \leq 1 \\ S_3^{2'}(x) = & 11.25x^2 - 22.5x + 10.25, & 1 \leq x \leq 3 \\ S_3^{3'}(x) = & -11.25x^2 + 112.5x - 192.25, & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_3^{1'}(1) = S_3^{2'}(1) \quad \longleftrightarrow \quad -1 = -1 \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK} \\ S_3^{2'}(3) = S_3^{3'}(3) \quad \longleftrightarrow \quad 44 = 44 \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK} \end{cases}$$

- Analisar a continuidade da segunda derivada de $S_3(x)$. A expressão da segunda derivada é dada por:

$$S_3''(x) = \begin{cases} S_3^{1''}(x) = & 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ S_3^{2''}(x) = & 22.5x - 22.5, & 1 \leq x \leq 3 \\ S_3^{3''}(x) = & -22.5x + 112.5, & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_3^{1''}(1) = S_3^{2''}(1) \quad \longleftrightarrow \quad 0 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK} \\ S_3^{2''}(3) = S_3^{3''}(3) \quad \longleftrightarrow \quad 45 = 45 \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK} \end{cases}$$

- Analisar se a função $S_3(x)$ é interpoladora de $f(x)$ nos pontos da tabela.

$$\begin{cases} S_3^1(0) = 5 = f(0) \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK} \\ S_3^3(5) = 180 = f(5) \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK} \end{cases}$$

Por isso, conclui-se que $S_3(x)$ é uma *spline* cúbica interpoladora de $f(x)$ nos pontos da tabela.

45. Considere a função $f(x)$ definida por

x	-2	1	2
$f(x)$	-8	1	8

Estime $f(-1)$ através de uma *spline* cúbica completa, sabendo que $f'(-2) = 12$ e $f'(2) = 20$.

Resolução

Como é pedido para calcular *spline* cúbica completa vamos averiguar que informações deram.

- É conhecida uma expressão analítica que represente a função? Não

- É conhecida uma expressão analítica que represente a derivada da função? Não

- Temos informação sobre a derivada da função nos pontos extremos da tabela de pontos dada? Sim. $f'(-2) = f'_0 = 12$ e $f'(2) = f'_n = 20$, sendo $n = 2$

Assim,

- Expressão para o ponto extremo inferior nó 0, $i = 0$
  $2(x_1 - x_0)M_0 + (x_1 - x_0)M_1 = \frac{6}{(x_1-x_0)}(f_1 - f_0) - 6f'_0$
- Expressão para o ponto interior $i = 1$
  $(x_1 - x_0)M_0 + 2(x_2 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 = \frac{6}{(x_2-x_1)}(f_2 - f_1) - \frac{6}{(x_1-x_0)}(f_1 - f_0)$
- Expressão para o ponto extremo superior nó n, $i = 2$, $n = 2$
  $2(x_2 - x_1)M_2 + (x_2 - x_1)M_1 = 6f'_2 - \frac{6}{(x_2-x_1)}(f_2 - f_1)$

Simplificando as expressões, o sistema resultante é

$$\begin{cases} 6M_0 + 3M_1 = -54 \\ 3M_0 + 8M_1 + M_2 = 24 \\ M_1 + 2M_2 = 78 \end{cases} \Longleftrightarrow \text{ por EGPP } \Longleftrightarrow \begin{cases} M_0 = -10 \\ M_1 = 2 \\ M_2 = 38 \end{cases}$$

Para estimar $f(-1)$ através de uma *spline* cúbica completa, então verificamos que o ponto -1 encontra-se entre o ponto $x = -2$ e $x = 1$, o que significa que $f(-1)$ vai ser aproximado pelo 1^o segmento da *spline*.

Seguidamente, constrói-se a expressão do 1^o segmento $(i = 1)$ da *spline* cúbica

$$s_3^1(x) = \frac{M_0}{6(x_1 - x_0)}(x_1-x)^3 + \frac{M_1}{6(x_1 - x_0)}(x-x_0)^3 + \left[\frac{f_0}{(x_1 - x_0)} - \frac{M_0(x_1 - x_0)}{6}\right](x_1-x) + \left[\frac{f_1}{(x_1 - x_0)} - \frac{M_1(x_1 - x_0)}{6}\right](x-x_0)$$

Substituindo valores e simplificando

$s_3^1(x) = -0.5556(1-x)^3 + 0.1111(x+2)^3 + 2.3333(1-x) - 0.6667(x+2)$

$f(-1) \approx s_3^1(-1) = -0.3333$

Resolução em Matlab/Octave

```
clear all
x=[-2 1 2]
y=[-8 1 8]
s=spline(x,[12 y 20], -1)
ppval(s,-1)
```

Integração numérica

46. Dada a tabela de valores da função f,

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.9	1.2	1.5	1.6	1.8	2.1
f_i	1	1.1	1.2	1.3	1.5	1.7	2.0	2.5	2.7	3.0	3.5	4.0	5.0

(a) calcule $\int_0^{2.1} f(x)dx$, usando toda a informação da tabela

(b) estime o erro de truncatura cometido na aproximação calculada em a).

Resolução

(a) Espaçamentos não constantes $\Rightarrow$ combinar as várias fórmulas de acordo com o número de subintervalos em cada conjunto de pontos igualmente espaçados:

$$\int_0^{2.1} f(x)dx = \int_0^{0.6} f(x)dx + \int_{0.6}^{1.5} f(x)dx + \int_{1.5}^{1.6} f(x)dx + \int_{1.6}^{1.8} f(x)dx + \int_{1.8}^{2.1} f(x)dx$$

$$\int_0^{2.1} f(x)dx \approx \underbrace{S(0.1)}_{n=6} + \underbrace{3/8(0.3)}_{n=3} + \underbrace{T(0.1)}_{n=1} + \underbrace{T(0.2)}_{n=1} + \underbrace{T(0.3)}_{n=1}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2.1} f(x)dx \quad &\approx \quad \frac{0.1}{3}\left[1 + 4(1.1) + 2(1.2) + 4(1.3) + 2(1.5) + 4(1.7) + 2.0\right] \\ &+ \frac{1.5-0.6}{8}\left[2 + 3(2.5) + 3(2.7) + 3.0\right] \\ &+ \frac{0.1}{2}\left[3.0 + 3.5\right] + \frac{0.2}{2}\left[3.5 + 4.0\right] + \frac{0.3}{2}\left[4.0 + 5.0\right] \\ &\approx \quad 0.8267 + 2.3175 + 0.325 + 0.75 + 1.35 = 5.5692\end{aligned}$$

(b) O cálculo do erro da alínea a), envolve a soma dos erros cometidos pela aplicação de cada uma das fórmulas de integração.

- Para $[0, 0.6] \rightarrow e_{CS}(0.1) = -\dfrac{(0.1)^4}{180}(0.6-0)f^{(iv)}(\eta),\ \eta \in [0, 0.6]$

x_i	f_i	dd$_1$	dd$_2$	dd$_3$	dd$_4$
0	1				
		1			
0.1	1.1		0		
		1		0	
0.2	1.2		0		41.6668
		1		16.6667	
0.3	1.3		5		-83.3335
		2		-16.6667	
0.4	1.5		0		83.3335
		2		16.6667	
0.5	1.7		5		
		3			
0.6	2.0				

$f^{(iv)}(\eta) \approx \max|\text{dd}_4| \times 4! \leq 83.3335 \times 4!$

$|e_{CS}(0.1)| \leq \dfrac{(0.1)^4}{180}(0.6) \times 83.3335 \times 4! = 0.0007$

- Para $[0.6, 1.5] \rightarrow e_{C3/8}(0.3) = -\dfrac{(0.3)^4}{80}(1.5-0.6)f^{(iv)}(\eta),\ \eta \in [0.6, 1.5]$

x_i	f_i	dd$_1$	dd$_2$	dd$_3$	dd$_4$
0.6	2.0				
		1.6667			
0.9	2.5		-1.6667		
		0.6667		2.4691	
1.2	2.7		0.5555		11.023
		1		13.4921	
1.5	3.0		10		
		5			
1.6	3.5				

$f^{(iv)}(\eta) \approx |\text{dd}_4| \times 4! \leq 11.023 \times 4!$

$|e_{C3/8}(0.3)| \leq \dfrac{(0.3)^4}{80}(0.9) \times 11.023 \times 4! = 0.024107$

- Para $[1.5, 1.6] \rightarrow e_{CT}(0.1) = -\dfrac{(0.1)^2}{12}(1.6-1.5)f''(\eta),\ \eta \in [1.5, 1.6]$

x_i	f_i	dd$_1$	dd$_2$
1.5	3.0		
		5	
1.6	3.5		-8.3333
		2.5	
1.8	4.0		

$f''(\eta) \approx |\text{dd}_2| \times 2! \leq 8.3333 \times 2!$

$|e_{CT}(0.1)| \leq \dfrac{(0.1)^2}{12}(0.1) \times 8.3333 \times 2! = 0.0013889$

- Para $[1.6, 1.8] \rightarrow e_{CT}(0.2) = -\dfrac{(0.2)^2}{12}(1.8-1.6)f''(\eta),\ \eta \in [1.6, 1.8]$

  Usa-se a informação da tabela das diferenças divididas anteriormente.

$f''(\eta) \approx |\text{dd}_2| \times 2! \leq 8.3333 \times 2!$

$|e_{CT}(0.2)| \leq \dfrac{(0.2)^2}{12}(0.2) \times 8.3333 \times 2! = 0.011111$

- Para $[1.8, 2.1] \rightarrow e_{CT}(0.3) = -\dfrac{(0.3)^2}{12}(2.1 - 1.8)f''(\eta),\ \eta \in [1.8, 2.1]$

x_i	f_i	dd_1	dd_2
1.6	3.5		
		2.5	
1.8	4.0		1.6666
		3.3333	
2.1	5.0		

$f''(\eta) \approx |\text{dd}_2| \times 2! \leq 1.6666 \times 2!$

$|e_{CT}(0.3)| \leq \dfrac{(0.3)^2}{12}(0.3) \times 1.6666 \times 2! = 0.0075$

Logo, o erro de truncatura total é dado por:

$$|e_T| \leq |e_{CS}(0.1)| + |e_{C3/8}(0.3)| + |e_{CT}(0.1)| + |e_{CT}(0.2)| + |e_{CT}(0.3)|$$

$$e_T \leq 0.044807$$

Resolução em Matlab/Octave

```
%alinea (a)
x=[0  0.1  0.2  0.3  0.4  0.5  0.6  0.9  1.2  1.5  1.6  1.8  2.1];
y=[1  1.1  1.2  1.3  1.5  1.7  2.0  2.5  2.7  3.0  3.5  4.0  5.0];
trapz(x,y)
```

47. Foram registados os consumos $f(x_i)$ de um aparelho em determinados instantes, x_i (em seg.):

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	3.6	6.6	9.6	9.8	10
$f(x_i)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.7	0.8

Calcule o consumo total ao fim de 10 segundos.

Resolução

Como para $[0, 10]$ o espaçamentos entre pontos não é constante $\Rightarrow$ combinar as várias fórmulas de acordo com o número de subintervalos em cada conjunto de pontos igualmente espaçados.

$$\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^{0.6} f(x)dx + \int_{0.6}^{9.6} f(x)dx + \int_{9.6}^{10} f(x)dx$$

$$\int_0^{10} f(x)dx \approx \underbrace{S(0.1)}_{n=6} + \underbrace{3/8(3)}_{n=3} + \underbrace{S(0.2)}_{n=2}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{10} f(x)dx &\approx \frac{0.1}{3}(0+4(0.1)+2(0.2)+4(0.3)+2(0.4)+4(0.5)+0.6)\\
&+\frac{3\times 3}{8}(0.6+3(0.6)+3(0.6)+0.6)\\
&+\frac{0.2}{3}(0.6+4(0.7)+0.8)\\
&\approx 5.86
\end{aligned}
$$

Resolução em Matlab/Octave

```
x=[0  0.1  0.2  0.3  0.4  0.5  0.6  3.6  6.6  9.6  9.8  10];
y=[0  0.1  0.2  0.3  0.4  0.5  0.6  0.6  0.6  0.6  0.7  0.8];
trapz(x,y)
```

48. Considere a tabela de valores de uma função polinomial p de grau menor ou igual a 3

x_i	0	1	2	3	4
$p(x_i)$	1	a	3	0	0

(a) Use a fórmula de Simpson com $h = 2$ para calcular uma aproximação a $I = \int_0^4 p(x)\,dx$. Use 6 casas decimais nos cálculos.

(b) Utilizando a fórmula composta de Simpson com base em todos os pontos da tabela para aproximar I, determine o valor de a. Justifique.

Resolução

(a)

$$\int_0^4 p(x)dx \approx \frac{2}{3}(1+4\times 3+0) = 8.666667$$

O espaço percorrido é de 8.666667, aproximadamente.

(b) Sabemos que os pontos da tabela pertencem a um polinómio de grau 3, pelo que a quarta derivada é nula. Por isso, o erro de truncatura resultante da aplicação da fórmula de Simpson na alínea (a) é zero. Então,

$$\int_0^4 p(x)dx = 8.666667$$

usando apenas alguns ou todos os pontos da tabela. Logo, aplicando a fórmula composta de Simpson com $h = 1$ e igualando a 8.666667, permite determinar o valor de a.

$\int_0^4 p(x)dx = \frac{1}{3}(1+4\times a+2\times 3+4\times 0+0) = 8.666667 \Longleftrightarrow a = 4.75$

Resolução em Matlab/Octave

```
%alinea (a)
x=[0  2  4];
y=[1  3  0];
trapz(x,y)
```

49. Uma corrida de *dragsters* tem duas fases distintas: na primeira fase, a mais curta, o movimento do carro é perfeitamente não determinístico, dependendo das derrapagens e da forma como o condutor consegue dominar o carro. Na segunda fase, o carro tem um movimento muito rápido, cuja aceleração está perfeitamente definida.

Considere-se a prova do condutor Don Nase de duração 7.5 s. Na primeira fase os valores da aceleração em cada instante encontram-se na tabela:

t_i	0	0.5	1	1.5
$a(t_i)$	0	0.35	0.55	0.9

Na segunda fase da corrida a aceleração é definida pela seguinte expressão:

$$a(t) = 0.5t^2 - 0.15t \quad \text{para} \quad t \in [1.5, 7.5].$$

(a) Estime a velocidade na primeira fase da corrida, utilizando a fórmula de integração mais adequada.

(b) Estime a velocidade na segunda fase da corrida, utilizando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura em valor absoluto inferior a 0.3.

(c) Estime o erro de truncatura cometido na alínea (a).

Resolução

(a) Na primeira fase da corrida, $t \in [0, 1.5]$, temos uma tabela com 4 pontos e espaçamento $h = 0.5$ constante, por isso devemos escolher a fórmula de integração mais adequada.

A velocidade v é calculada recorrendo ao integral da aceleração. Dispõe-se de 4 pontos (3 subintervalos), logo deve ser usada a fórmula dos três oitavos.

$$\int_0^{1.5} a(t)dt \approx \underbrace{3/8(0.5)}_{n=3}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{1.5} a(t)dt &\approx \frac{3 \times 0.5}{8}(0 + 3 \times 0.35 + 3 \times 0.55 + 0.9) \\ &\approx 0.675\end{aligned}$$

A velocidade do dragster, na primeira fase da corrida, é aproximadamente igual a 0.675 m/s.

(b) Na segunda fase da corrida, $t \in [1.5, 7.5]$, o erro da truncatura da fórmula composta do Trapézio, em valor absoluto, tem de ser inferior a 0.3, então

$$\left|\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)\right| < 0.3 \Longrightarrow \left|\frac{h^2}{12}(7.5-1.5)f''(\eta)\right| < 0.3, \quad \eta \in [1.5, 7.5]$$

Temos de derivar a expressão $a(t)$ para determinar um majorante da segunda derivada da expressão em $[1.5, 7.5]$.

$$a(t) = 0.5t^2 - 0.15t$$

$$a'(t) = t - 0.15$$

$$a''(t) = 1$$

Desta forma, obtém-se que a segunda derivada é constante e igual a 1, logo podem substituir-se os valores na expressão do erro.

$$\left|\frac{h^2}{12}(7.5 - 1.5) \times 1\right| < 0.3 \Longleftrightarrow h < 0.7746$$

Assim, como $h = \dfrac{(b-a)}{n} \Longrightarrow \dfrac{7.5 - 1.5}{n} < 0.7746 \Longleftrightarrow n > 7.7459$

Então, qualquer número de subintervalos (número inteiro) superior a 7.7 permite obter o valor do integral com erro inferior a 0.3, usando a fórmula composta do Trapézio.

Deve escolher-se um número que, se possível, permita usar um valor de espaçamento h como dízima finita e que atenda ao número de intervalos (par, ímpar, ...) que seja possível usar com a fórmula de integração. Como neste exercício pede para usar a fórmula do trapézio, então podemos usar qualquer número de subintervalos.

Logo $n = 8$ e $h = \dfrac{(7.5 - 1.5)}{8} = 0.75$

Assim, constrói-se a tabela:

t_i	1.5	2.25	3	3.75	4.5	5.25	6	6.75	7.5
$a(t_i)$	0.9000	2.1938	4.0500	6.4688	9.4500	12.9938	17.1000	21.7688	27

E aplica-se a fórmula composta do Trapézio

$$\begin{aligned}\int_{1.5}^{7.5} a(t)dt &\approx \frac{0.75}{2}(0.9 + 2 \times 2.1938 + 2 \times 4.0500 + 2 \times 6.4688 + 2 \times 9.4500 + 2 \times 12.9938 \\ &+ 2 \times 17.1 + 2 \times 21.7688 + 27) \\ &\approx 65.9813\end{aligned}$$

A velocidade do dragster, na segunda fase da corrida, é aproximadamente igual a 65.9813 m/s.

(c) Na alínea (a), para $t \in [0, 1.5]$, foi usada a fórmula dos 3/8, logo

$$e_{3/8}(0.5) = \frac{(0.5)^4}{80}(1.5 - 0)f^{(iv)}(\eta),\ \eta \in [0, 1.5]$$

Para a estimação de $f^{(iv)}$ (quarta derivada de f), uma vez que a expressão da função não foi dada, recorre-se ao cálculo das diferenças divididas de quarta ordem.

No entanto, são necessários 5 pontos, mas apenas se dispõe de 4, pelo que se utiliza o ponto mais próximo do intervalo (que foi usado em (b)).

t_i	a_i	dd_1	dd_2	dd_3	dd_4
0	0				
		0.7			
0.5	0.35		-0.3		
		0.4		0.4	
1	0.55		0.3		-0.045714
		0.7		0.297143	
1.5	0.9		0.82		
		1.725			
2.25	2.19375				

$f^{(iv)}(\eta) \approx |\text{dd}_4| \times 4! = |-0.045714| \times 4!$

$|e_{3/8}(0.5)| \leq \dfrac{(1.5)^5}{6480} \times 0.045714 \times 4! = 0.001286$

Resolução em Matlab/Octave

```
%% alinea (a)
x=[0   0.5    1   1.5];
y=[0  0.35  0.55  0.9];
trapz(x,y)

%% alinea (b)
Q=integral(@(x)0.5*x.^2-0.15*x,1.5,7.5,'AbsTol',0.3)
```

50. O comprimento do arco da curva $y = f(x)$ ao longo do intervalo $[a, b]$ é dado por

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Calcule uma aproximação numérica ao comprimento do arco da curva $f(x) = e^{-x}$ no intervalo $[0, 1]$, usando 5 pontos igualmente espaçados no intervalo.

Resolução

No intervalo $[0, 1]$, 5 pontos igualmente espaçados (corresponde a $n = 4$ subintervalos), logo

$h = \dfrac{1-0}{4} = 0.25.$

$f(x) = e^{-x}$

$f'(x) = -e^{-x}$

$$\int_0^1 \underbrace{\sqrt{1 + (-e^{-x})^2}}_{g(x)}dx.$$

Construindo a tabela

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$g(x)$	1.4142	1.2675	1.1696	1.1060	1.0655

Pela aplicação da fórmula composta de Simpson

$$\int_0^1 \sqrt{1+(-e^{-x})^2}dx \approx \frac{0.25}{3}(1.4142 + 4 \times 1.2675 + 2 \times 1.1696 + 4 \times 1.1060 + 1.0655) = 1.1927$$

Resolução em Matlab/Octave

```
h=(1-0)/4 %5 pontos <=> 4 subintervalos
x=0:h:1
y=sqrt(1+(-exp(-x)).^2)
sol_5_pontos=trapz(x,y)
```

ou

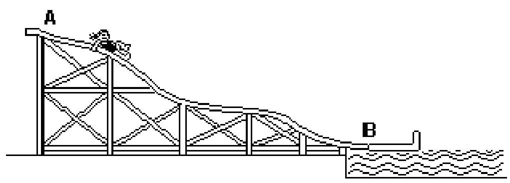
```
x=[0  0.25  0.5  0.75 1.0]
y=sqrt(1+(-exp(-x)).^2)
trapz(x,y)
```

Se não tivesse sido pedido para usar 5 pontos, fazia-se o comando:

```
Q=integral(@(x)sqrt(1+(-exp(-x)).^2),0,1)
```

51. A figura mostra uma pessoa que desliza, sem atrito, do alto de um escorrega (ponto A), acoplando-se a um carrinho que se encontra em repouso no ponto B. A partir deste instante, a pessoa e o carrinho movem-se juntos na água até parar.

    (a) Sabendo que a velocidade do conjunto pessoa-carrinho imediatamente após o acoplamento é 4 m/s e que a velocidade, v, em cada instante t na água é dada pela tabela seguinte, calcule (usando todos os pontos da tabela) a distância percorrida na água pelo conjunto pessoa-carrinho até parar.



t	0.0	0.3	0.6	0.8	1.0	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2
v	4.0	3.9	3.7	3.5	3.3	2.9	2.5	2.0	1.25	0.75	0.0

    (b) Estime o erro de truncatura cometido na alínea anterior.

    (c) Selecione o maior número possível de pontos da tabela por forma a obter um conjunto de pontos igualmente espaçados, e calcule a mesma distância usando uma única fórmula composta de integração no intervalo $[0, 4.2]$.

Resolução

(a) Espaçamentos não constantes $\Rightarrow$ combinar as várias fórmulas de integração de acordo com o número de subintervalos em cada conjunto de pontos igualmente espaçados:

$$\int_0^{4.2} v(t)dt = \int_0^{0.6} v(t)dt + \int_{0.6}^{1.2} v(t)dt + \int_{1.2}^{4.2} v(t)dt$$

$$\int_0^{4.2} v(t)dt \approx \underbrace{S(0.3)}_{n=2} + \underbrace{3/8(0.2)}_{n=3} + \underbrace{T(0.6)}_{n=5}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{4.2} v(t)dt \quad &\approx \quad \frac{0.3}{3}(4.0 + 4 \times 3.9 + 3.7) \\
&\quad + \frac{3 \times 0.2}{8}(3.7 + 3 \times 3.5 + 3 \times 3.3 + 2.9) \\
&\quad + \frac{0.6}{2}(2.9 + 2 \times 2.5 + 2 \times 2.0 + 2 \times 1.25 + 2 \times 0.75 + 0.0) \\
&\approx \quad 9.125
\end{aligned}$$

(b) O erro de truncatura cometido no intervalo [0, 4.2], consiste n soma dos erros de truncatura cometidos com a aplicação de cada uma das fórmulas.

$$|e| = |e_S| + |e_{3/8}| + |e_C T|$$

- Para $[0, 0.6] \rightarrow e_S(0.3) \leq \frac{(0.3)^4}{180}(0.6 - 0.0) f^{iv}(\eta),\ \eta \in [0, 0.6]$

  Para aproximar a 4^a derivada vai ser calculada a dd_4. Para isso, precisam-se de mais 2 pontos (os mais próximos), além dos 3 pontos usados para o cálculo do integral.

x_i	f_i	dd_1	dd_2	dd_3	dd_4
0.0	4.0				
		-0.3333			
0.3	3.9		-0.5557		
		-0.6667		-0.1386	
0.6	3.7		-0.6666		1.0909
		-1.0		0.9523	
0.8	3.5		0.0		
		-1.0			
1.0	3.3				

$f^{iv}(\eta) \approx |\text{dd}_4| \times 4! \leq 1.0909 \times 4!$

$|e_S(0.3)| \leq \frac{(0.3)^4}{180}(0.6) \times 1.0909 \times 4! = 0.0007$

- Para $[0.6, 1.2] \to e_{3/8}(0.2) \leq \dfrac{(0.2)^4}{80}(1.2-0.6)f^{iv}(\eta),\ \eta \in [0.6, 1.2]$

  Para aproximar a 4^a derivada vai ser calculada a dd_4. Para isso, precisa-se de mais 1 ponto.

$$
\begin{array}{cccccc}
x_i & f_i & \text{dd}_1 & \text{dd}_2 & \text{dd}_3 & \text{dd}_4 \\
\\
0.3 & 3.9 & & & & \\
 & & -0.6667 & & & \\
0.6 & 3.7 & & -0.6666 & & \\
 & & -1.0 & & 0.9523 & \\
0.8 & 3.5 & & 0.0 & & -5.6878 \\
 & & -1.0 & & -4.1667 & \\
1.0 & 3.3 & & -2.5 & & \\
 & & -2.0 & & & \\
1.2 & 2.9 & & & &
\end{array}
$$

  $f^{iv}(\eta) \approx |\text{dd}_4| \times 4! \leq |-5.6878| \times 4!$

  $|e_{3/8}(0.2)| \leq \dfrac{(0.2)^4}{80}(0.6) \times 5.6878 \times 4! = 0.0016$

- Para $[1.2, 4.2] \to e_{CT}(0.6) \leq \dfrac{(0.6)^2}{12}(4.2-1.2)f''(\eta),\ \eta \in [1.6, 1.8]$

$$
\begin{array}{cccc}
x_i & f_i & \text{dd}_1 & \text{dd}_2 \\
1.2 & 2.9 & & \\
 & & -0.6667 & \\
1.8 & 2.5 & & -0.1389 \\
 & & -0.8333 & \\
2.4 & 2.0 & & -0.3472 \\
 & & -1.25 & \\
3.0 & 1.25 & & 0.3472 \\
 & & -0.833 & \\
3.6 & 0.75 & & -0.3472 \\
 & & -1.25 & \\
4.2 & 0.0 & &
\end{array}
$$

  $f''(\eta) \approx |\text{dd}_2| \times 2! \leq 0.3472 \times 2!$

  $|e_{CT}(0.6)| \leq \dfrac{(0.6)^2}{12}(3) \times 0.3472 \times 2! = 0.0625$

$$|e| \leq 0.0007 + 0.0016 + 0.0625 = 0.0648$$

(c) Para usar o maior número de pontos e uma única fórmula de integração, selecionam-se apenas os pontos da tabela inicial que estejam igualmente espaçados, dando origem à seguinte tabela:

t	0.0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2
v	4.0	3.7	2.9	2.5	2.0	1.25	0.75	0.0

Seleccionaram-se 8 pontos, ou seja 7 subintervalos. Através da fórmula de integração do Trapézio:

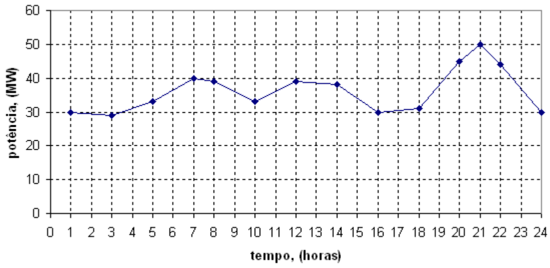
$$\int_0^{4.2} v(t)dt \quad \approx \quad \frac{0.6}{2}\left(4 + 2*3.7 + 2*2.9 + 2*2.5 + 2*2.0 + 2*1.25 + 2*0.75 + 0\right) = 9.06$$

Resolução em Matlab/Octave

```
%alinea (a)
x=[0.0  0.3  0.6  0.8  1.0  1.2  1.8  2.4   3.0   3.6   4.2];
y=[4.0  3.9  3.7  3.5  3.3  2.9  2.5  2.0  1.25  0.75  0.0];
trapz(x,y)

%alinea (c)
xx=[0.0  0.6  1.2  1.8  2.4   3.0   3.6   4.2];
yy=[4.0  3.7  2.9  2.5  2.0  1.25  0.75  0.0];
trapz(xx,yy)
```

52. A curva de carga típica de uma determinada cidade (MW) está representada na figura



ou pela correspondente tabela

tempo (horas)	1	3	5	7	8	10	12	14	16	18	20	21	22	24
potência (MW)	30	29	33	40	39	33	39	38	30	31	45	50	44	30

(a) Estime o consumo de energia diário desta cidade.

(b) Estime o erro de truncatura cometido para a altura do dia de maior consumo.

Solução

a)

$$\int_1^{24} p(t)\ dt = \int_1^{7} p(t)\ dt + \int_7^{8} p(t)\ dt + \int_8^{20} p(t)\ dt + \int_{20}^{22} p(t)\ dt + \int_{22}^{24} p(t)\ dt = 821.8333$$

(b) A altura do dia com maior consumo é entre as 20 e 22 horas e foi usada a regra de Simpson.

$$e_S(1) = dfrac1^4 180(22-20)f^{iv}(\eta),\ \eta \in [20,22]$$

$$|e_S(1)| \leq \frac{1^4}{180}(2) \times 0.4167 \times 4! = 0.1111$$

Resolução em Matlab/Octave

```
x = [1 3 5 7 8 10 12 14 16 18 20 21 22 24];
y = [30 29 33 40 39 33 39 38 30 31 45 50 44 30];
consumo = trapz(x,y)
```

53. A resposta de um transdutor a uma onda de choque causada por uma explosão é dada pela função $F(t) = 8e^{-t}\dfrac{I(a)}{\pi}$ para $t \geq a$, em que

$$I(a) = \int_1^2 f(x,a)dx \qquad\qquad \text{com } f(x,a) = \frac{e^{ax}}{x}dx$$

Calcule $I(1)$ usando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura (em valor absoluto) inferior a 0.05.

Resolução

Pretende calcular-se

$$I(1) = \int_1^2 f(x,1)dx = \int_1^2 \frac{e^x}{x}$$

através da fórmula de integração do Trapézio, sabendo que $|e_{CT}| < 0.05$, ou seja,

$$\left|\frac{h^2}{12}(2-1)f''(\eta)\right| < 0.05,\ \eta \in [1,2]$$

Para determinar o espaçamento h, vamos começar por calcular o majorante de $f''(\eta),\ \eta \in [1,2]$

$f(x) = \frac{e^x}{x} = x^{-1}e^x$

$f'(x) = -x^{-2}e^x + x^{-1}e^x = e^x(x^{-1} - x^{-2})$

$f''(x) = e^x(x^{-1} - x^{-2}) + e^x(-x^{-2} + 2x^{-3}) = e^x(x^{-1} - 2x^{-2} + 2x^{-3})$

$f''(1) = 2.718282$ e $f''(2) = 1.847264$

Então o majorante de $f''(\eta),\ \eta \in [1,2]$, é 2.718282.

$\left|\dfrac{h^2}{12}(2-1) \times 2.718282\right| < 0.05 \Longleftrightarrow h < 0.469817$

Como $\dfrac{b-a}{n}$ então $\dfrac{2-1}{n} < 0.469817 \Rightarrow n > 2.128488$

Qualquer número de subintervalos superior a 2, pode ser usado.

Porém, para diminuir os erros de arredondamento, deve escolher-se um número de subintervalos que, se possível, permita usar um valor de espaçamento h que não seja dízima infinita. Além disso, deve ter-se em atenção que o número de intervalos selecionado deve permitir usar com a fórmula de integração pretendida. Como neste exercício pede para usar a fórmula do trapézio, então podemos usar qualquer número de subintervalos.

$n = 3 \Rightarrow h = 0.3333333$ (dízima infinita)

$n = 4 \Rightarrow h = 0.25$

De seguida, construir a tabela

x	1	1.2500	1.5000	1.7500	2
$f(x)$	2.7183	2.7923	2.9878	3.2883	3.6945

Calcular $I(a)$, usando a fórmula de Trapézio composta

$I(a) \approx \frac{0.25}{2}(2.7183 + 2 \times 2.7923 + 2 \times 2.9878 + 2 \times 3.2883 + 3.6945) = 3.0687$

Resolução em Matlab/Octave

```
I=integral(@(x)exp(x)./x,1,2,'AbsTol',0.05)
```

54. A função distribuição normal acumulada é uma função importante em estatística. Sabendo

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{z} e^{-x^2/2} dx}{2}$$

calcule uma estimativa de $F(1)$, usando a fórmula composta do trapézio com 5 pontos no cálculo do integral.

Resolução

Pretende calcular-se

$$F(1) = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-x^2/2} dx}{2}$$

usando 5 pontos ($n = 4$)no cálculo do integral, então $h = \frac{1-(-1)}{4} = 0.5$ e $y(x) = e^{-x^2/2}$

x	-1	-0.5	0	0.5	1
y	0.6065	0.8825	1	0.8825	0.6065

usando a fórmula composta do trapézio no cálculo do integral

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2/2} dx \approx \frac{0.5}{2}(0.6065 + 2 \times 0.8825 + 2 \times 1 + 2 \times 0.8825 + 0.6065) = 1.6858$$

$$F(1) = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 1.6858}{2} = 0.8363$$

Resolução em Matlab/Octave

```
x=-1:0.5:1
y=exp(-(x.^2)./2)
I=trapz(x,y)
F=(1+1/sqrt(2*pi)*I)/2
```

55. O trabalho realizado por uma força $F(x)$ cujo ângulo entre a direção do movimento e a força é dado por $\theta(x)$, pode ser obtido pela seguinte fórmula:

$$W = \int_{x_0}^{x_n} F(x) \cos(\theta(x)) dx$$

em que x_0 e x_n são a posição inicial e final, respetivamente.

(a) Calcule a melhor aproximação ao trabalho realizado, W, ao puxar um bloco da posição 0 ft até à posição 30 ft sabendo que a força aplicada e o ângulo usado são dados na tabela seguinte.

x	0	2.5	5	15	20	25	30
$F(x)$	0.0	7.0	9.0	14.0	10.5	12.0	5.0
$\theta(x)$	0.5	0.9	1.4	0.9	1.3	1.48	1.5

(b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido no intervalo $[5, 15]$.

Resolução

(a) Pretende determinar-se

$$W = \int_0^{30} \underbrace{F(x)\cos(\theta(x))}_{\text{função}} dx$$

x	0	2.5	5	15	20	25	30
$F(x)$	0.0	7.0	9.0	14.0	10.5	12.0	5.0
$\theta(x)$	0.5	0.9	1.4	0.9	1.3	1.48	1.5
$F(x)\cos(\theta(x))$	0.00000	4.35127	1.52970	8.70254	2.80874	1.08806	0.35369

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{30} F(x)\cos(\theta(x))\,dx \\ &= \underbrace{\int_0^5 F(x)\cos(\theta(x))dx}_{S(2.5)} + \underbrace{\int_5^{15} F(x)\cos(\theta(x))dx}_{T(10)} + \underbrace{\int_{15}^{30} F(x)\cos(\theta(x))dx}_{3/8(5)} \\ &\approx 15.778987 + 51.16122 + 38.899907 = 105.840114 \end{aligned}$$

(b) Pretende determinar-se o erro cometido em $[5, 15]$

$$e_{CT} \leq \left| -\frac{(10)^2}{12}(15-5) \times 0.147673 \times 2! \right| = 24.612167$$

Resolução em Matlab/Octave

```
x=[0   2.5   5    15    20    25   30];
F=[0.0  7.0  9.0  14.0  10.5  12.0  5.0];
teta=[0.5  0.9  1.4   0.9   1.3   1.48  1.5]
y=F.*cos(teta)
trapz(x,y)
```

56. Considere a seguinte função dada pela tabela

x_i	1	1.15	1.3	1.45	1.6	1.75	1.9
$f(x_i)$	a	16.8	19.4	22	b	27.6	30.7

e seja $I = \int_1^{1.9} f(x)\,dx$. Ao utilizar as fórmulas compostas de Simpson e dos três oitavos foram obtidas as seguintes aproximações a I, respetivamente $S(0.15) = 20.005$ e $3/8(0.15) = 20.030625$. Determine os valores de a e b. Use 6 casas decimais nos cálculos.

Resolução

$S(0.15) = 20.005$

$S(0.15) = \frac{0.15}{3}(a + 4 \times 16.8 + 2 \times 19.4 + 4 \times 22 + 2b + 4 \times 27.6 + 30.7) = 20.005 \Longleftrightarrow a + 2b = 65$

$3/8(0.15) = 20.030625$

$3/8(0.15) = \frac{3\times 0.15}{8}(a+3\times 16.8+3\times 19.4+2\times 22+3b+3\times 27.6+30.7) = 20.030625 \Longleftrightarrow a+3b = 90$

Resolvendo o sistema por EGPP

$$\begin{cases} a + 2b = 65 \\ a + 3b = 90 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 25 \end{cases}$$

57. Considere a seguinte tabela da função $f(x)$

x_i	0.0	1.0	2.0
$f(x_i)$	0.0000	0.8415	0.9093

(a) Determine um valor aproximado de $I = \int_0^2 f(x)\,dx$, usando a fórmula composta do trapézio com $h = 1$.

(b) Sabendo que um valor aproximado de I, usando a fórmula composta do trapézio com $h = 0.5$ é $T(0.5) = 1.2667$, determine uma nova aproximação de I, usando a fórmula composta de Simpson com $h = 0.5$.

Resolução

(a) $\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{1}{2} \times 1(0 + 2 \times 0.8415 + 0.9093) = 1.29615$

(b) $T(0.5) = 1.2667$

$\Longleftrightarrow \dfrac{0.5}{2}(0 + 2 \times f(0.5) + 2 \times 0.8415 + 2 \times f(1.5) + 0.9093) = 1.2667$

$\Longleftrightarrow 0.5f(0.5) + 0.5f(1.5) = 0.618625$

$\Longleftrightarrow f(0.5) + f(1.5) = 1.23725$

$$\begin{aligned} S(0.5) &= \frac{0.5}{3} \times (0 + 4 \times f(0.5) + 2 \times 0.8415 + 4 \times f(1.5) + 0.9093) \\ &= \frac{2}{3} \times f(0.5) + \frac{2}{3} \times f(1.5) + 0.43205 \\ &= \frac{2}{3} \times (\underbrace{f(0.5) + f(1.5)}_{T(0.5)}) + 0.43205 \\ &= \frac{2}{3} \times 1.23725 + 0.43205 \\ &= 1.256883 \end{aligned}$$