Métodos Numéricos
Interpolação polinomial

Ana Maria A. C. Rocha

Departamento de Produção e Sistemas

Universidade do Minho

arocha@dps.uminho.pt

Objetivo da aproximação de funções

Objetivo: dada a função $f(x)$, encontrar uma aproximação (por exemplo, um polinómio) com o menor erro possível.

1. Dado um conjunto discreto de valores

$$(x_i, f_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n \quad (n + 1 \text{ pontos})$$

   pretende-se encontrar uma *relação funcional* (expressão) entre as variáveis x e f para prever o comportamento entre as variáveis e poder estimar valores,
   - ▷ x é variável independente,
   - ▷ f é variável dependente.

2. Dada uma função complicada (expressão) $f(x)$, pretende-se conhecer uma expressão mais simples que descreva o melhor possível o comportamento de f como função de x.

Erro da aproximação $e(x) = f(x) - p_n(x)$

Teorema de Weirstrass: Dadas a função $f(x)$, contínua num intervalo $[a, b]$, e uma quantidade $\varepsilon > 0$, existe sempre um polinómio $p_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que o **erro** da aproximação $\|f(x) - p_n(x)\| < \varepsilon$.

1. Podemos assegurar que o erro seja igual a zero para um conjunto de $n+1$ pontos selecionados do intervalo $[a, b]$, isto é, o polinómio passa por esses $n+1$ pontos da função,

$$f_i \equiv f(x_i) \; = \; p_n(x_i), \text{ para } \; i = 0, 1, \ldots, n.$$

► interpolação polinomial (*polinómio de colocação*) - é único e é de grau $\leq n$.
Exemplo: polinómio interpolador de Newton baseado nas *diferenças divididas* (adequado quando n é pequeno)

Erro da aproximação $e(x) = f(x) - p_n(x)$

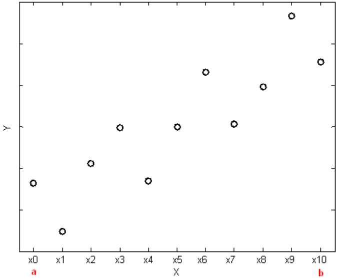
- interpolação segmentada (ou 'spline')

Exemplos: 'spline' linear (função formada por polinómios de grau 1) e 'spline' cúbica (função formada por polinómios de grau 3).

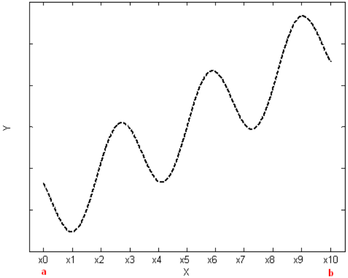
2. Podemos assegurar que a *soma dos quadrados dos erros* seja mínima no intervalo $[a, b]$.

Exemplo: polinómio dos mínimos quadrados

Aproximação de funções



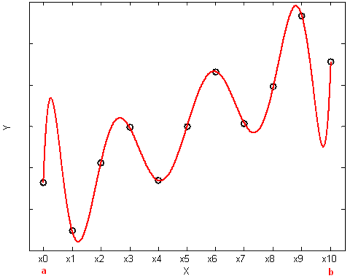
função dada por 11 pontos



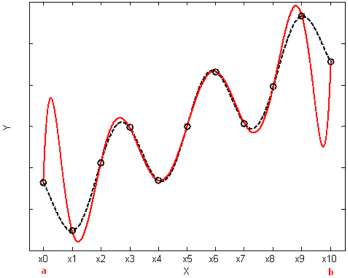
função dada por uma expressão

Polinómio interpolador

polinómio de colocação de grau 10 $--\ p_{10}(x)$



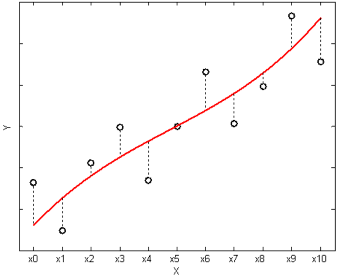
função dada por 11 pontos



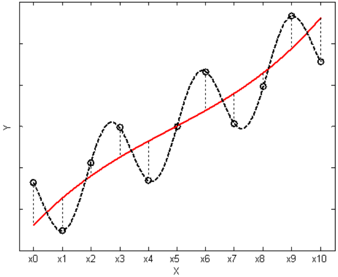
função dada por uma expressão

Mínimos quadrados

modelo polinomial , por exemplo, de grau 3 $--\ p_3(x)$



função dada por 11 pontos



função dada por uma expressão

Qual o método mais adequado?

- Se os dados são precisos, isto é, não contêm erros de observação, é mais vantajoso usar uma função que passe pelos pontos dados:

  ▷ interpolação polinomial - polinómio de colocação,
  ▷ 'spline';

- se os dados possuem erros de observação, é mais conveniente encontrar uma função que descreva o comportamento dos dados, sem ter a preocupação de passar a curva pelos pontos:
  ▷ aproximação dos mínimos quadrados.

Polinómio de colocação baseado nas diferenças divididas

Tabela das diferenças divididas da função dada f:

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & [x_0,x_1] & & & \\
x_1 & f_1 & & [x_0,x_1,x_2] & & \\
 & & [x_1,x_2] & & [x_0,x_1,x_2,x_3] & \\
x_2 & f_2 & & [x_1,x_2,x_3] & & \ldots \\
 & & [x_2,x_3] & & [x_1,x_2,x_3,x_4] & \\
x_3 & f_3 & & \ldots & & \ldots \\
\vdots & \vdots & \ldots & & \ldots & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & [x_{n-2},x_{n-1},x_n] & & \\
 & & [x_{n-1},x_n] & & & \\
x_n & f_n & & & &
\end{array}
$$

Diferenças divididas (dd)

- dd de 1^a ordem (dd1)

$$[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$[x_1, x_2] = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2} = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$$

$$\ldots$$

- dd de 2^a ordem (dd2)

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Diferenças divididas (dd)

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3} = \frac{[x_2, x_3] - [x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

- dd de 3^a ordem (dd3)

$$[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_0, x_1, x_2] - [x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_3} = \frac{[x_1, x_2, x_3] - [x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

$$\ldots$$

- dd de 4^a ordem (dd4)

$$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{[x_0, x_1, x_2, x_3] - [x_1, x_2, x_3, x_4]}{x_0 - x_4} = \cdots$$

$$\ldots$$

Propriedades das diferenças divididas

1. Podem ser calculadas para **qualquer** espaçamento (não constante) entre os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$.
2. As diferenças divididas são funções simétricas dos seus argumentos:

$$[x_0, x_1] = [x_1, x_0]$$

$$[x_0, x_1, x_2] = [x_2, x_1, x_0]$$

$$\ldots$$

3. As diferenças divididas de ordem n, de uma função que é um polinómio de grau n, são iguais entre si e diferentes de zero $\Rightarrow$ as de ordem $n+1$ são nulas.

Polinómio interpolador de Newton baseado em diferenças divididas

Sejam os $(n+1)$ pontos:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n \\
f_0 \equiv f(x_0) & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \cdots & f_{n-2} & f_{n-1} & f_n
\end{array}
$$

o polinómio de grau $\leq n$:

$$
\begin{array}{rcl}
p_n(x) & = & f_0 + (x-x_0)[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_2] \\
& + & (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x_0,x_1,x_2,x_3] + \cdots \\
& + & (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \\
& & [x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n]
\end{array}
$$

em que x_0 é o primeiro ponto da lista de pontos que vai usar-se para construir o polinómio.

Interpolação direta

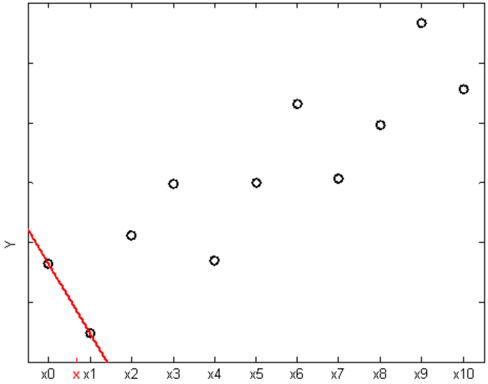
Para estimar o valor de $f(\bar{x})$, para um dado ponto $\bar{x}$ que não está na tabela:

1. e se selecionar interpolação polinomial - polinómio de colocação - escolher o grau do polinómio n
2. $\Rightarrow$ selecionar $n+1$ pontos da tabela

o polinómio de colocação $p_n(x)$, construído com base nos $n+1$ pontos, é único

3. os pontos devem ser escolhidos de modo a:
    - garantir, pelo menos um ponto à direita e um à esquerda de $\bar{x}$,
    - escolher os restantes pontos da tabela que estejam mais próximos de $\bar{x}$.

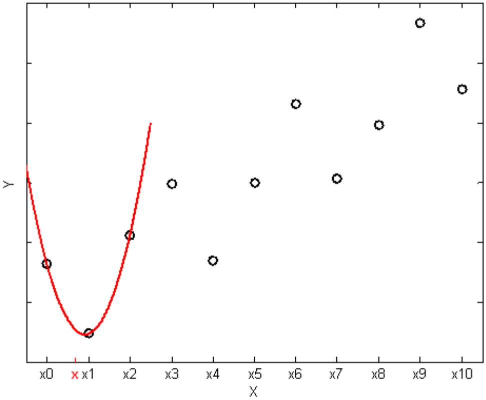
Exemplo de polinómio de grau 1



Escolher 2 pontos. O ponto interpolador é x:

$$f(x) \approx p_1(x) = f_0 + (x - x_0)[x_0, x_1]$$

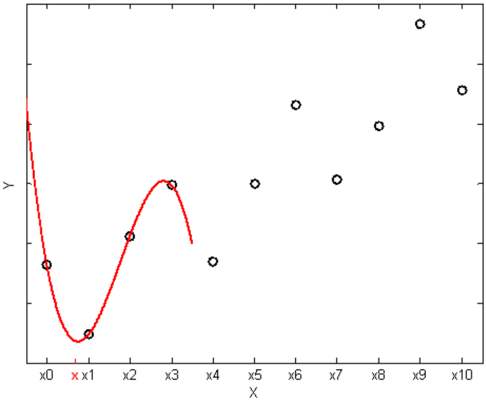
Exemplo de polinómio de grau 2



Escolher 3 pontos. O ponto interpolador é x:

$$f(x) \approx p_2(x) = f_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]$$

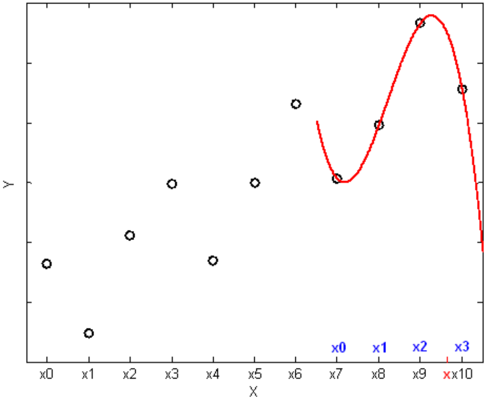
Exemplo de polinómio de grau 3



Escolher 4 pontos. O ponto interpolador é x:

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_3(x) &= f_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3] \end{aligned}$$

Exemplo de outro polinómio de grau 3 - outros pontos



Escolher 4 pontos. O ponto interpolador é x:

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_3(x) &= f_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3] \end{aligned}$$

Erro de truncatura

$$R_n(x) = \left|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right|$$

com $\xi \in [a, b]$.
O erro de truncatura cometido com a aproximação, para um certo x do intervalo $[a, b]$, que contém $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ - pontos usados para construir o polinómio de grau n - é estimado:

- CASO 1: se $f(x)$ for dada por uma expressão, então

$$R_n(x) \leq |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)| \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Erro de truncatura

em que

$$\text{maj} \left| \left[f^{(n+1)}(x) \right]_{[a,b]} \right| \leq M_{n+1}.$$

- CASO 2: senão - $f(x)$ é dada por uma tabela de valores

  $$R_n(x) \leq |(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)| \, |(\text{dd de ordem } n + 1)|$$

em que

$$(\text{dd de ordem } n + 1) = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_z]$$

se só existir uma, ou a maior delas em valor absoluto se existirem mais que uma.

Exercício 1

Os registos efetuados numa linha de montagem são os seguintes:

nº de unidades	1	3	4	6	7	10
horas necessárias	2	3	4	5	6	10

1. Tendo sido recebidos pedidos para a montagem de 8 unidades, use interpolação cúbica para estimar o tempo (em horas) necessário para satisfazer esse pedido.
2. Estime o erro de truncatura cometido na alínea anterior com o pedido de 8 unidades.

Resolução do Exercício 1

1. Se se pretende interpolação cúbica, então
   - o polinómio é de grau **3** ($n = 3$)
   - são necessários **4** ($n + 1$) pontos.

   Usa-se o polinómio interpolador de Newton.

$$p_3(x) = f_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] +$$

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

Para a montagem de 8 unidades:
1) Escolher/selecionar os pontos que estão mais próximos de 8, incluindo o que está à sua esquerda e à direita.
Por isso, **os pontos selecionados são: 4, 6, 7, 10.**

Resolução do Exercício 1 (cont.)

2) Construir a tabela das diferenças divididas baseada nesses pontos

i	x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$
0	4	**4**			
			0.500000		
1	6	5		**0.166667**	
			1.000000		**-0.013889**
2	7	6		0.083333	
			1.333333		
3	10	10			

3) Construir o polinómio

$p_3(x) = 4+(x-4)*0.500000+(x-4)(x-6)*0.166667+(x-4)(x-6)(x-7)*(-0.013889)$

4) Estimar o tempo de montagem de 8 unidades.

$$p_3(8) = 7.2222$$

Resolução do Exercício 1 (cont.)

2. Para calcular o erro de truncatura, utiliza-se a expressão

$$|R_3(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)||dd4|$$

Acrescentar um ponto à tabela das diferenças divididas construída anteriormente, para poder calcular a $dd4$.

i	x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$
0	4	4				
			0.500000			
1	6	5		0.166667		
			1.000000		-0.013889	
2	7	6		0.083333		**-0.013889**
			1.333333		0.000000	
3	10	10		0.083333		
			1.000000			
z	3	3				

$$|R_3(x)| \leq |(x-4)(x-6)(x-7)(x-10)| * |-0.013889|$$

Substituindo para $x = 8$, $|R_3(8)| = 0.222224$.

Exercício 2

Considere a seguinte tabela de uma função polinomial

x	-1	0	1	2	3	4
$p(x)$	-1	-3	-1	5	15	29

Sem recorrer à expressão analítica de $p(x)$:

1. Mostre que $p(x)$ é um polinómio interpolador de grau 2.
2. Determine $p(10)$.

Escreva a expressão de $p_2(x)$.

Resolução do Exercício 2

1. Construir a tabela das diferenças divididas

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$
-1	-1			
		-2		
0	-3		2	
		2		0
1	-1		2	
		6		0
2	5		2	
		10		0
3	15		2	
		14		
4	29			

Como as $dd2$ são todas iguais entre si (e diferentes de zero), consequentemente as $dd3$ são iguais a zero, e conclui-se que $p(x)$ é um polinómio interpolador de grau 2.

Resolução do Exercício 2 (cont.)

2. Para determinar $p(10)$, sem calcular a expressão de $p(x)$, incluir o ponto interpolador (10) no final da tabela e determinar as diferenças divididas de ordem 1, $dd1$, sabendo que a $dd2 = 2$.

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$
-1	-1			
		-2		
0	-3		2	
		2		0
1	-1		2	
		6		0
2	5		2	
		10		0
3	15		2	
		14		
4	29		2	
		A		
10	**B**			

$$\frac{14 - A}{3 - 10} = 2$$

$$A = 28$$

$$\frac{29 - B}{4 - 10} = 28$$

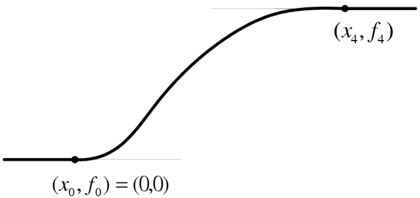
$$B = 197$$

Logo, $p(10) = 197$.

3. $p_2(x) = -1 + (x + 1) * (-2) + (x + 1) * x * (2)$

Exercício 3

Pretende-se construir um desvio entre duas linhas de caminho de ferro paralelas. O desvio deve corresponder a um polinómio de grau três que une os pontos $(x_0, f_0) = (0, 0)$ e (x_4, f_4), como mostra a figura



Com base nos dados da tabela

x_i	0	1	1.5	2	x_4
$f_i = p_3(x_i)$	0	0.3125	0.6328125	1	f_4

verifique se o ponto $(x_4, f_4) = (4, 2)$ pertence ao polinómio. Use 7 casas decimais nos cálculos.

Resolução do Exercício 3

Para sabermos se o ponto $(x_4, f_4) = (4, 2)$ pertence ao polinómio de grau 3, podemos começar por calcular as diferenças divididas com base em todos os pontos da tabela, incluindo o ponto $(x_4, f_4) = (4, 2)$.

x_i	f_i	$dd1$	$dd2$	$dd3$	$dd4$
0	0				
		0.3125			
1	0.3125		0.21875		
		0.640625		**-0.0625**	
1.5	0.6328125		0.09375		0
		0.734375		**-0.0625**	
2	1		-0.09375		
		0.5			
4	2				

Uma vez que as $dd3$ são iguais e a $dd4$ é zero, conclui-se que f é um polinómio de grau 3 e o ponto $(4, 2)$ pertence a esse polinómio.