Métodos Numéricos
Sistemas de equações não lineares

Ana Maria A. C. Rocha

Departamento de Produção e Sistemas

Universidade do Minho

arocha@dps.uminho.pt

Método de Newton

Equação iterativa do método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Deve ser implementada para $k = 1, 2, \ldots$

- x é um escalar
- $f(x)$ é um escalar
- $f'(x)$ é um escalar

Reformulação do método de Newton para uma equação não linear

Para resolver $f(x) = 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
a equação iterativa do método de Newton pode ser colocada na forma:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k, k = 1, 2, \ldots$$

com

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= -\frac{1}{f'(x_k)} f(x_k) \\ &= -\left(f'(x_k)\right)^{-1} f(x_k). \end{aligned}$$

Generalização: problema com mais que uma equação não linear e mais que uma variável $\longrightarrow$ sistema de equações não lineares.

Exemplo de sistema de duas equações não lineares

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1^2+(x_2-2)^2-9 & = & 0 \\ (x_1-1)^2+x_2^2-2 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f_1(x_1,x_2)=0 \\ f_2(x_1,x_2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow f(x)=0$$

sistema com 2 equações e **2 variáveis** (x_1 e x_2)

na equação	no sistema
1 função (f)	2 funções (f_1 e f_2)
	f é vetor $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$
1 variável (x)	2 variáveis (x_1 e x_2)
	x é vetor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
problema de dimensão $n=1$	problema de dimensão $n=2$

Exemplo de sistema de três equações não lineares

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 0.5 & = & 0 \\ x_1^2 - 625x_2^2 & = & 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + 9 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow f(x) = 0$$

sistema com 3 equações e **3 variáveis** (x_1, x_2 e x_3)

3 funções (f_1, f_2 e f_3), f é vetor $\left(\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \right)$

3 variáveis (x_1, x_2 e x_3), x é vetor $\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right)$

problema de dimensão $n = 3$

Sistema de equações não lineares

Forma geral do problema:

$$f(x) = 0, \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ \ldots & & \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ e } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Método iterativo de Newton

Um dos métodos para resolver este sistema de n equações não lineares nas n variáveis é o **método iterativo de Newton** - extensão do método de Newton para 1 equação.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

com

$$\Delta x^{(k)} = -\left(J(x^{(k)})\right)^{-1} f(x^{(k)}) \qquad (1)$$

$\left(J(x^{(k)})\right)^{-1}$ - inversa da matriz do **Jacobiano** das funções

Método iterativo de Newton

$$\text{em que } \begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ \Delta x \in \mathbb{R}^n \\ f \in \mathbb{R}^n \\ J(x) \in \mathbb{R}^{n\times n} \end{cases}$$

na equação ($n = 1$)	no sistema ($n > 1$)
$f'(x)$ é um escalar	as derivadas formam uma matriz $n \times n$ (matriz do Jacobiano)

Matriz do Jacobiano

A matriz do Jacobiano contém as primeiras derivadas parciais das funções $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$ em ordem às variáveis $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Implementação da equação iterativa

A equação (1):

$$\Delta x^{(k)} = -\left(J(x^{(k)})\right)^{-1} f(x^{(k)})$$

$$\Updownarrow$$

$$J(x^{(k)})\,\Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)}) \qquad (2)$$

isto é,

- o vetor $\Delta x^{(k)}$ (em cada iteração) é a **solução do sistema linear** (2) e
- é obtido pelo método de **eliminação de Gauss com pivotagem parcial** (**EGPP**).

Critério de paragem

⋆ estimativa do erro relativo da aproximação

$$\frac{\left\|\Delta x^{(k)}\right\|_2}{\left\|x^{(k+1)}\right\|_2} \leq \varepsilon_1$$

e

⋆ aproximação ao zero de $f(x)$

$$\left\|f(x^{(k+1)})\right\|_2 \leq \varepsilon_2$$

ε_1 e ε_2 quantidades positivas e próximas de zero; $\|.\|_2$ é a norma 2.

Algoritmo do método de Newton para sistemas de equações não lineares

passo 1. Fornecer $x^{(1)}$;

passo 2. Fazer $k = 1$;

passo 3. Resolver o sistema linear

$$J(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)})$$

por EGPP para calcular o vetor $\Delta x^{(k)}$;

passo 4. Calcular $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$;

passo 5. Se critério de paragem é verificado

$$\text{então} \begin{cases} \text{terminar com} \\ x^* \leftarrow x^{(k+1)} \\ f(x^*) \leftarrow f(x^{(k+1)}) \end{cases}$$

$$\text{senão} \begin{cases} \text{fazer } \; k = k+1 \\ \text{voltar para passo 3.} \end{cases}$$

Condições de convergência do método de Newton

Para resolver o sistema:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ \ldots & & \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \end{cases}$$

em que $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$,

Condições de convergência do método de Newton

Se

- x^* é tal que $f(x^*) = 0$,
- f é um vetor de funções continuamente diferenciáveis,
- matriz $J(x^*)$ é não singular $\left(\exists \left(J(x^*)\right)^{-1}\right)$
  e $\left(J(x^*)\right)^{-1}$ é limitada $\left(\left\|\left(J(x^*)\right)^{-1}\right\| \leq \beta,\ \beta > 0\right)$,
- $J(x)$ matriz Lipschitz contínua na vizinhança de x^*,
  $\left(\exists \gamma > 0 : \|J(x^{(k)}) - J(x^*)\| \leq \gamma \|x^{(k)} - x^*\|\right)$
- $x^{(1)}$ (aproximação inicial) na vizinhança de x^* - convergência local,
  $\Rightarrow$ o método iterativo de Newton converge e

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\left\|x^* - x^{(k+1)}\right\|}{\left\|x^* - x^{(k)}\right\|^p} = L \quad (L > 0, \ \ p = 2)$$

(convergência quadrática).

Exercício 1

Pensei em dois números x e y.
O produto dos dois somado ao cubo do segundo é igual a 3 e o logaritmo neperiano do segundo adicionado à metade do primeiro é 1.
Em que números pensei?

1. Formule o problema como um sistema de equações.
2. Resolva-o utilizando para aproximação inicial o ponto $(1.9, 1.1)$. Apresente o resultado obtido no final de uma iteração e a correspondente estimativa do erro relativo.

Resolução do Exercício 1

A formulação do problema é dada por

$$\begin{cases} xy + y^3 = 3 \\ \ln(y) + \frac{x}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow F(x,y) = \begin{cases} xy + y^3 - 3 = 0 \\ \ln(y) + \frac{x}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

A matriz do Jacobiano é dada por

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} y & x + 3y^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

Resolução do Exercício 1

Aproximação inicial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1.1 \end{pmatrix}$$

1^a **iteração**, $k = 1$:

$$J(1.9, 1.1) = \begin{pmatrix} 1.10000 & 5.53000 \\ 0.50000 & 0.90909 \end{pmatrix}$$

$$F(1.9, 1.1) = \begin{pmatrix} 0.421000 \\ 0.045310 \end{pmatrix}$$

Resolvendo por EGPP

$$\begin{pmatrix} 1.10000 & 5.53000 \\ 0.50000 & 0.90909 \end{pmatrix} \Delta^{(1)} = - \begin{pmatrix} 0.421000 \\ 0.045310 \end{pmatrix}$$

$$\Delta^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.074879 \\ -0.091025 \end{pmatrix}$$

Resolução do Exercício 1

Solução do problema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(1)} + \Delta^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1.1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.074879 \\ -0.091025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9749 \\ 1.0090 \end{pmatrix}$$

Estimativa do erro relativo:

$$\frac{\left\|\Delta^{(1)}\right\|_2}{\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(2)}\right\|_2} = \frac{0.11787}{2.\ 1954} = 0.0537$$

Exercício 2

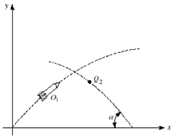
A posição de um determinado objeto O_1 no plano XY é descrita em função do tempo (t) pelas seguintes equações:

$$x_1(t) = t \qquad y_1(t) = 1 - e^{-t}$$

A posição de um segundo objeto O_2 é descrita pelas seguintes equações:

$$x_2(t) = 1 - t\cos(\alpha) \qquad y_2(t) = -0.1t^2 + tsen(\alpha)$$

em que α representa o ângulo, como mostra a figura



Determine os valores de t e α na posição em que os dois objetos colidem, *i.e.*, na posição em que se igualam as coordenadas x e y:

$$\begin{aligned} t &= 1 - t\cos(\alpha) \\ 1 - e^{-t} &= -0.1t^2 + tsen(\alpha) \end{aligned}$$

Considere os valores iniciais $(t, \alpha)^{(1)} = (4.3, 2.4)$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.015$ (ou máx 2 iter.).

Resolução do Exercício 2

Nota: os cálculos devem ser feitos em radianos.

O sistema de equações não lineares é o seguinte

$$\left\{ \begin{array}{l} t - 1 + t\cos(\alpha) = 0 \\ 1 - e^{-t} + 0.1t^2 - t\ \mathrm{sen}(\alpha) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1(t,\alpha) = 0 \\ f_2(t,\alpha) = 0 \end{array} \right.$$

Matriz do Jacobiano

$$J = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ll} 1 + \cos(\alpha) & -t\ \mathrm{sen}(\alpha) \\ e^{-t} + 0.2t - \ \mathrm{sen}(\alpha) & -t\cos(\alpha) \end{array} \right)$$

Aproximação inicial:

$$\left(\begin{array}{c} t \\ \alpha \end{array} \right)^{(1)} = \left(\begin{array}{c} 4.3 \\ 2.4 \end{array} \right)$$

Resolução do Exercício 2

1ª iteração, $k = 1$:

$$J(4.3, 2.4) = \begin{pmatrix} 0.262606 & -2.90449 \\ 0.198105 & 3.170793 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1(4.3, 2.4) \\ f_2(4.3, 2.4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.129207 \\ -0.069060 \end{pmatrix}$$

Resolvendo por EGPP

$$\begin{pmatrix} 0.262606 & -2.90449 \\ 0.198105 & 3.170793 \end{pmatrix} \Delta^{(1)} = -\begin{pmatrix} 0.129207 \\ -0.069060 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0.262606 & -2.90449 & -0.129207 \\ 0.198105 & 3.170793 & 0.069060 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \Delta^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.148505 \\ 0.031058 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix}^{(1)} + \begin{pmatrix} -0.148505 \\ 0.031058 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1515 \\ 2.431058 \end{pmatrix}$$

Resolução do Exercício 2

Critério de paragem:

$$\frac{\left\|\Delta^{(1)}\right\|_2}{\left\|\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix}^{(2)}\right\|_2} = \frac{0.15172}{4.81092} = 0.03154 \leq 0.015 \quad \text{(falso)}$$

2ª iteração, $k = 2$:

$$J(4.1515, 2.431058) = \begin{pmatrix} 0.241987 & -2.70777 \\ 0.193802 & 3.146892 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1(4.1515, 2.431058) \\ f_2(4.1515, 2.431058) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.004608 \\ -1.6367 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Resolver por EGPP:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.241987 & -2.70777 & -0.004608 \\ 0.193802 & 3.146892 & 1.6367 \times 10^{-5} \end{array}\right) \Longleftrightarrow \Delta^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.01124 \\ 0.0006973 \end{pmatrix}$$

Resolução do Exercício 2

$$\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix}^{(3)} = \begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix}^{(2)} + \begin{pmatrix} -0.01124 \\ 0.0006973 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.14026 \\ 2.43176 \end{pmatrix}$$

Critério de paragem:

$$\frac{\left\|\Delta^{(2)}\right\|_2}{\left\|\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix}^{(3)}\right\|_2} = \frac{0.01126}{4.80158} = 0.000235 \leq \varepsilon_1 \qquad \text{(verdade)}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} f_1(4.14026, 2.43176) \\ f_2(4.14026, 2.43176) \end{pmatrix}\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} 6.6 \times 10^{-6} \\ 5.0 \times 10^{-6} \end{pmatrix}\right\|_2 = 8.3 \times 10^{-6} \leq \varepsilon_2 \qquad ($$

As duas condições do critério de paragem são verificadas logo:

$$\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix}^{(*)} \approx \begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4.14026 \\ 2.43176 \end{pmatrix}$$