Métodos Numéricos
Equações não lineares

Ana Maria A. C. Rocha

Departamento de Produção e Sistemas

Universidade do Minho

arocha@dps.uminho.pt

Uma equação não linear

Forma geral do problema:

$$f(x) = 0$$

com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- x é a variável independente
- $y = f(x)$ é a variável dependente.

Quando f é não linear em x, a equação pode:

- não ter soluções reais;
- ter uma solução real;
- ter mais do que uma solução real;
- ter também soluções complexas.

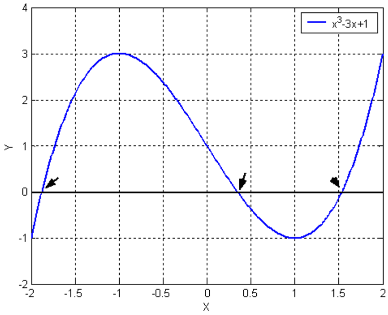
Exemplos de equações não lineares

algébricas

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$
$$x^4 + 8x^3 - 8x^2 - 200x - 425 = 0$$

transcendentes

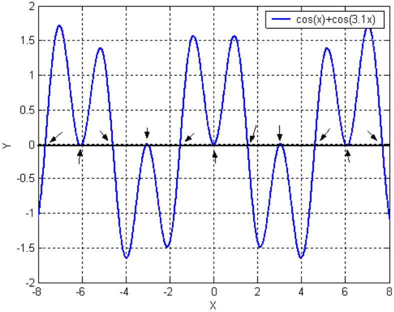
$$x - e^{-x} = 0$$
$$\cos(x) + \cos(3.1x) = 0$$

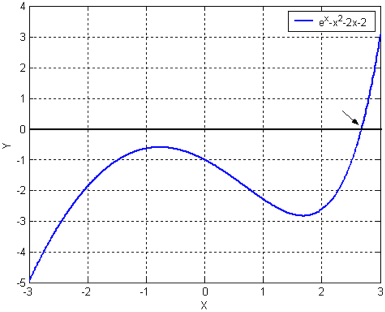


$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

NOTA: Uma solução (real) da equação $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ uma raiz (real) da equação $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ um zero (real) da função $f \Leftrightarrow$ ponto de intersecção de f com o eixo do X do plano XOY real

Exemplos de equações não lineares





$$\cos(x) + \cos(3.1x) = 0$$

$$e^x - x^2 - 2x - 2 = 0$$

Métodos iterativos

Os métodos iterativos

- permitem resolver uma equação não linear;
- exigem que seja fornecida uma (ou mais do que uma) aproximação inicial.

Esta aproximação inicial (ou, as aproximações iniciais) pode ser identificada através da **localização das raízes**, por exemplo, através da representação gráfica de:

▷ $f(x)$ no plano XOY, **se** f for fácil de representar,

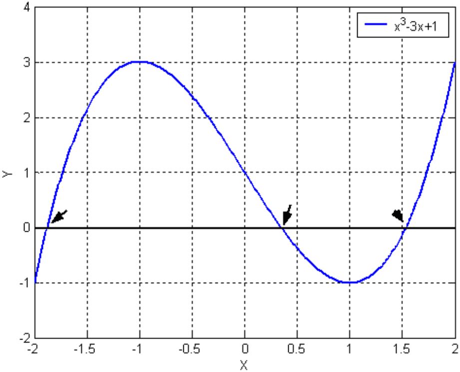
▷ $g(x)$ e $h(x)$ no plano XOY, em que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = h(x)$$

se f for difícil de representar (**e** $g(x)$ e $h(x)$ forem fáceis de representar).

Exemplo de localização

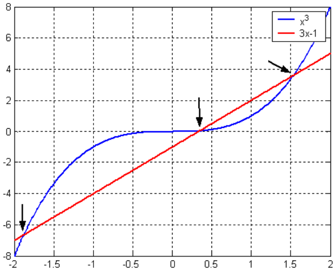
Considere a equação $x^3 - 3x + 1 = 0$.



Exemplo de localização (cont.)

$$x^3 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - (3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 & = & 3x - 1 \\ g(x) & = & h(x) \end{cases}$$

Os zeros de $f(x) = x^3 - 3x + 1$ são os pontos onde se verifica a intersecção de $g(x) = x^3$ com $h(x) = 3x - 1$.



Métodos iterativos

Da representação gráfica é possível retirar
i) um **intervalo** que contenha a solução pretendida,
ou,
ii) **um valor** que esteja próximo da solução pretendida.

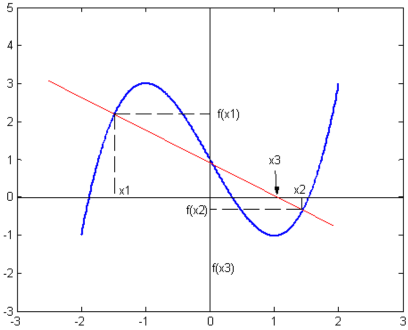
- Para calcular raízes **reais**:

$$\text{métodos iterativos para } f(x) = 0 \begin{cases} \text{método da secante} \\ \text{método de Newton} \\ \text{outros} \end{cases}$$

- Para calcular raízes **complexas**: o método da secante e o método de Newton podem ser usados, desde que se introduza a aritmética complexa nos cálculos e as aproximações iniciais sejam números complexos.

Método da secante

- Em cada iteração, e com base em dois pontos - duas aproximações - o método aproxima a função $f(x)$ por uma reta definida por esses dois pontos;
- o ponto de interseção da reta com o eixo do X fornece outra aproximação.



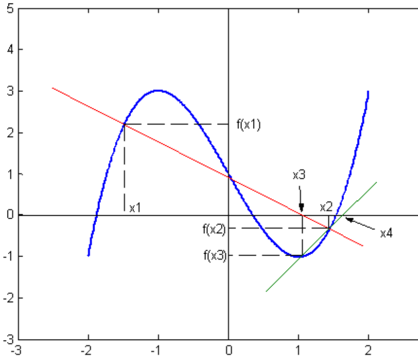
A primeira iteração:

- a reta passa pelos 2 últimos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ e a nova aproximação é x_3.

Método da secante

A segunda iteração:

- a reta passa agora pelos 2 últimos pontos $(x_2, f(x_2))$ e $(x_3, f(x_3))$;
- a nova aproximação é x_4.



Método da secante

Sejam os dois pontos

$$(x_{k-1}, f(x_{k-1})) \quad \text{e} \quad (x_k, f(x_k))$$

então o ponto de interseção da reta, que passa por estes dois pontos, com o eixo do X é

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Esta é a equação iterativa do método da secante.
Deve ser implementada para $k = 2, 3, \ldots$

Critério de paragem

Critério de paragem para os métodos iterativos da secante e de Newton.

- estimativa do erro relativo da aproximação próxima de zero

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} \leq \varepsilon_1$$

e

- valor absoluto de $f(x_{k+1})$ próximo de zero (zero de $f(x)$)

$$|f(x_{k+1})| \leq \varepsilon_2$$

ε_1 e ε_2 quantidades positivas e próximas de zero - tolerâncias - quanto mais pequenas forem mais próximo x_{k+1} fica da solução x^*.

Algoritmo do método da secante

passo 1. Fornecer x_1 e x_2

passo 2. Fazer $k = 2$

passo 3. Calcular

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

passo 4. Se critério de paragem é verificado

$$\text{então} \begin{cases} \text{terminar com} \\ x^* \leftarrow x_{k+1} \\ f(x^*) \leftarrow f(x_{k+1}) \end{cases}$$
$$\text{senão} \begin{cases} \text{fazer } \; k = k + 1 \\ \text{voltar para passo 3.} \end{cases}$$

Condições de convergência do método da secante

O método iterativo da secante nem sempre converge.
Só é possível garantir convergência para a solução se:

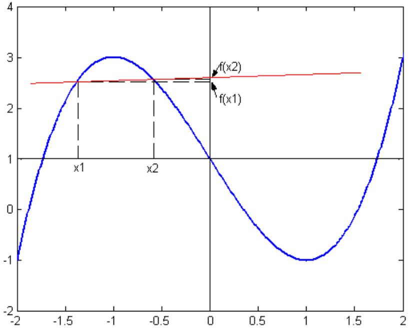
- x^* é tal que $f(x^*) = 0$
- $f(x)$ é continuamente diferenciável
- $f'(x^*) \neq 0$
- x_1 e x_2 (aproximações iniciais) na vizinhança de x^* - convergência local

  $\Rightarrow$ método iterativo da secante converge e

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^p} = L\,, \quad \begin{array}{l} L > 0, p = 1.618 \\ \Leftrightarrow \text{ convergência superlinear} \end{array}$$

Situação de divergência

• ao longo do processo iterativo pode acontecer que as duas aproximações, usadas para gerar a nova aproximação, tenham valores de f muito próximos $\Rightarrow$ divergência



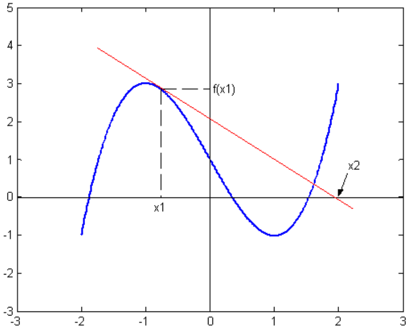
$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1}) f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Método de Newton

- em cada iteração, e com base na informação de f e de f' relativa a um ponto, o método aproxima a função $f(x)$ por uma reta que é tangente a f nesse ponto;
- o ponto de intersecção da reta com o eixo do X fornece outra aproximação.

A primeira iteração:

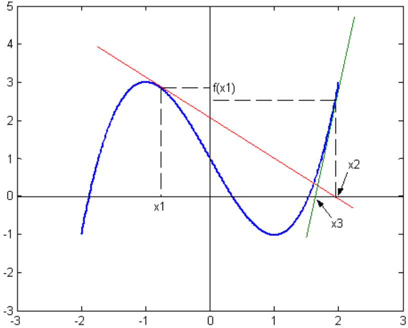
- a reta passa pelo ponto $(x_1, f(x_1))$ e tem declive $f'(x_1)$ e a nova aproximação é x_2



Método de Newton

A segunda iteração:

- a reta passa agora pelo ponto $(x_2, f(x_2))$ e tem declive igual a $f'(x_2)$;
- a nova aproximação é x_3



Método de Newton

Sejam o ponto

$$(x_k, f(x_k)) \quad \text{e} \quad f'(x_k)$$

então o ponto de intersecção da reta, que passa por este ponto, com declive definido por $f'(x_k)$, com o eixo do X é

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Esta é a equação iterativa do método de Newton.
Deve ser implementada para $k = 1, 2, \ldots$

Algoritmo do método de Newton

passo 1. Fornecer x_1

passo 2. Fazer $k = 1$

passo 3. Calcular

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f\left(x_k\right)}{f'\left(x_k\right)}$$

passo 4. Se critério de paragem é verificado

$$\text{então} \begin{cases} \text{terminar com} \\ x^* \leftarrow x_{k+1} \\ f(x^*) \leftarrow f(x_{k+1}) \end{cases}$$

$$\text{senão} \begin{cases} \text{fazer } \ k = k + 1 \\ \text{voltar para passo 3.} \end{cases}$$

Condições de convergência do método de Newton

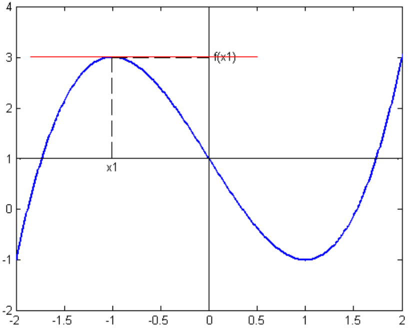
O método iterativo de Newton nem sempre converge.
Só é possível garantir convergência para a solução se:

- x^* é tal que $f(x^*) = 0$
- $f(x)$ continuamente diferenciável
- $f'(x^*) \neq 0$
- x_1 (aproximação inicial) na vizinhança de x^* - convergência local,
  $\Rightarrow$ método iterativo de Newton converge e

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^p} = L\,, \quad \begin{array}{l} L > 0, p = 2 \\ \Leftrightarrow \text{ convergência quadrática} \end{array}$$

Situação de divergência

Ao longo do processo iterativo pode acontecer que o declive da reta que é tangente a f na aproximação corrente seja um valor $\approx 0 \Rightarrow$ divergência



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

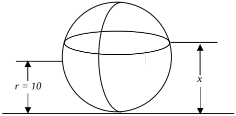
Método da secante *vs* método de Newton

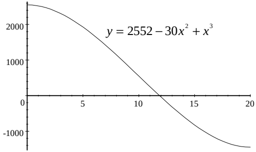
- **Quando convergem**, o método de Newton é, em geral, mais rápido (convergência quadrática contra convergência superlinear);
- o método da secante necessita apenas de informação de $f(x)$, o método de Newton precisa de informação sobre $f(x)$ e $f'(x)$;
- se $f(x)$ é uma expressão muito complicada, deve optar-se pelo método da secante.

Exercício 1

Uma bola esférica de raio $r = 10$cm feita de uma substância cuja densidade é $\rho = 0.638$, foi colocada num recipiente com água. Calcule a distância x da parte submersa da bola sabendo que verifica:

$$\frac{\pi\left(x^3 - 3x^2 r + 4r^3\rho\right)}{3} = 0.$$





Use o método de Newton para calcular uma aproximação à solução, usando no critério de paragem $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$ (ou faça no máximo 3 iterações).

Resolução do Exercício 1

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 60x$$

1^a iteração, $k = 1$
$x_1 = 10$ (ver gráfico)
$f(x_1) = 552$
$f'(x_1) = -300$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Leftrightarrow x_2 = 11.84$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_2)| = 6.2295 \leq \varepsilon_2 \text{ (Falso)}$$

Exercício 1

2ª iteração, $k = 2$
$x_2 = 11.84$
$f(x_2) = 6.229504$
$f'(x_2) = -289.8432$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Leftrightarrow x_3 = 11.861493$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_3)| = 0.0026 \leq \varepsilon_2 \text{ (Falso)}$$

Exercício 1

3ª iteração, $k = 3$

$x_3 = 11.861493 \qquad f(x_3) = 0.002464 \qquad f'(x_3) = -289.604531$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \Leftrightarrow x_4 = 11.861502$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_4)| = 0.000143 \leq \varepsilon_2 \text{ (Verdadeiro)}$$

$$\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = 0.000001 \leq \varepsilon_1 \text{ (Verdadeiro)}$$

Solução:

$$\begin{cases} x^* \approx 11.861502 \\ f(x^*) \approx -0.000143 \end{cases}$$

Exercício 2

O volume v de um líquido num tanque esférico de raio r está relacionado com a profundidade h do líquido da seguinte forma:

$$v = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3}.$$

Calcule, utilizando um método que não recorre ao cálculo de derivadas, a profundidade h, num tanque de raio $r = 1$ para um volume de 0.5. Utilize para aproximação inicial o intervalo $[0.25, 0.5]$ e considere $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ ou no máximo 3 iterações.

Resolução do Exercício 2

$$f(x) = \frac{\pi x^2(3*1-x)}{3} - 0.5 = 0$$

Usar o método da secante, que não usa derivadas.
Pontos iniciais - $x_1 = 0.25$ e $x_2 = 0.5$.

Mudança de variável de $h \Longrightarrow x$ para facilitar.

1^a iteração, $k = 2$
$x_1 = 0.25, f(x_1) = -0.32$
$x_2 = 0.5, f(x_2) = 0.1545$

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} \Leftrightarrow x_3 = 0.4186$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_3)| = |-0.0263| \leq \varepsilon_2 \text{ (Falso!!)}$$

Resolução do Exercício 2

2ª iteração, $k = 3$
$x_2 = 0.5, f(x_2) = 0.1545$
$x_3 = 0.4186, f(x_3) = -0.0263$

$$x_4 = x_3 - \frac{(x_3 - x_2) f(x_3)}{f(x_3) - f(x_2)} \Leftrightarrow x_4 = 0.4304$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_4)| = |-0.0014| \leq \varepsilon_2 \text{ (Verdadeiro!!)}$$

$$\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = 0.0275 \leq \varepsilon_1 \text{ (Falso!!)}$$

Resolução do Exercício 2

3ª iteração, $k = 4$

$x_3 = 0.4186, f(x_3) = -0.0263$

$x_4 = 0.4304, f(x_4) = -0.0014$

$$x_5 = x_4 - \frac{(x_4 - x_3) f(x_4)}{f(x_4) - f(x_3)} \Leftrightarrow x_5 = 0.4311$$

- Critério de paragem:

$$|f(x_5)| = |1.5297e - 05| \leq \varepsilon_2 \text{ (Verdadeiro)}$$

$$\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 0.0016 \leq \varepsilon_1 \text{ (Verdadeiro)}$$

Solução:

$$\begin{cases} x^* \approx 0.4311 \\ f(x^*) \approx 1.5297e - 05 \end{cases}$$