Métodos Numéricos
Sistemas de equações lineares

Ana Maria A. C. Rocha

Departamento de Produção e Sistemas

Universidade do Minho

arocha@dps.uminho.pt

Sistemas de equações lineares

A forma geral do problema

sistema de equações lineares de ordem n – é

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = & b_3 \\ \ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = & b_n \end{array}\right.$$

ou na forma simplificada

$$Ax = b$$

Sistema de equações lineares

▷ $A_{n\times n}$ - matriz dos coeficientes do sistema com n linhas e n colunas,

▷ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - vetor solução,

▷ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ - termo independente,

▷ $(A|b)$ - matriz ampliada do sistema.

Existência e unicidade da solução

- O sistema de equações lineares tem sempre solução?
- A solução é única ?

Depende de $c(A)$ - caraterística da matriz A - número de linhas ou colunas linearmente independentes (sistema quadrado).

Seja $c\,(A|b)$ a caraterística da matriz ampliada.

$\star$ Existe uma relação direta entre $c(A)$,
o determinante de A ($det(A)$)
e a existência da inversa de A (A^{-1}):

Existência e unicidade da solução (cont.)

$$\text{se } c(A) = n \begin{cases} det(A) \neq 0 \\ A^{-1} \text{ existe} \\ \text{sistema possível e determinado (solução única)} \end{cases}$$

$$\text{se } c(A) < n \begin{cases} det(A) = 0 \\ A^{-1} \text{ não existe} \\ \begin{cases} \text{se } c(A) = c(A|b) \begin{cases} \text{sistema possível} \\ \text{e indeterminado} \\ \text{(infinidade de soluções)} \end{cases} \\ \text{se } c(A) < c(A|b) \begin{cases} \text{sistema impossível} \\ \text{(não tem solução)} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Exemplos - análise da caraterística

Sistema com $c(A) = 2$ (as linhas de A são linearmente independentes)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{array}\right)$$ (sistema possível e determinado)

Sistema com $c(A) < 2$ e $c(A|b) = 1$ (a 1ª linha de $[A|b]$ é o dobro da segunda)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$ (sistema possível e indeterminado)

Sistema com $c(A) < 2$ e $c(A) < c(A|b)(= 2)$ (a 1ª linha de $[A]$ é o dobro da segunda, mas a de $[A|b]$ não)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$ (sistema impossível)

Métodos de resolução

$$Ax = b$$

- **métodos diretos**
  - ▷ sistema de pequena ou média dimensão,
  - ▷ a solução exata é obtida ao fim de um número finito de operações.

- **métodos iterativos**
  - ▷ para sistemas de grandes dimensões (milhares ou milhões de equações !),
  - ▷ a solução exata é obtida ao fim de um número infinito de operações.

Método direto de eliminação de Gauss com pivotagem parcial (EGPP)

Passo 1. transformar $Ax = b$ em $Ux = c$ usando as operações elementares - a partir da matriz ampliada $(A|b)$:

- troca de duas linhas paralelas;
- multiplicação de uma linha por um escalar $\neq 0$;
- substituição de uma linha pela que dela se obtém adicionando o produto de outra linha paralela por um escalar.

U é uma matriz triangular superior

- os sistemas $Ax = b$ e $Ux = c$ são equivalentes - têm a mesma solução;

Passo 2. resolver $Ux = c$ por substituição inversa.

Exemplo

Resolver o sistema de equações lineares, com $n = 3$, usando **6** casas decimais:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3 \\ 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 \end{array} \right. .$$

Passo 1: A matriz ampliada é

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \end{array} \right)$$

Como a dimensão do sistema é $n = 3 \Rightarrow$ passo 1. tem $n - 1 = 2$ etapas.

Exemplo (cont.)

- **Etapa 1:**
  - colocar 'pivot' na posição $(1,1)$ (maior módulo),
  - trocar as linhas 1 e 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{3} & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{array}\right)$$

  - Para reduzir a zero os elementos 0.1 e 0.3, calculam-se os escalares - denominados multiplicadores: $m_{21} = -\frac{0.1}{\mathbf{3}} = -0.033333$; $m_{31} = -\frac{0.3}{\mathbf{3}} = -0.1$

  Nota: $|\text{multiplicador}| \leq 1$ conserva estabilidade numérica.

Exemplo (cont.)

$\triangleright$ $m_{21}\times$ (linha 1) + linha 2 e $m_{31}\times$ (linha 1) + linha 3 $\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & & 7.85 \\ 0 & \mathbf{7.003333} & -0.293333 & & -19.561664 \\ 0 & -0.19 & 10.02 & & 70.615 \end{array}\right)$$

- **Etapa 2:** colocar 'pivot' na posição $(2,2)$ (elemento de maior módulo)
  - não é preciso trocar linhas,
  - para reduzir a zero o elemento -0.19, calcula-se o multiplicador: $m_{32} = -\frac{-0.19}{\mathbf{7.003333}} = 0.027130$

Exemplo (cont.)

▷ $m_{32}\times$ (linha 2) + linha 3 $\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 7.003333 & -0.293333 & -19.561664 \\ 0 & 0 & 10.012042 & 70.084292 \end{array}\right)$$

• A matriz ampliada está já na forma $(U|c)$ que corresponde ao sistema $Ux = c$.

Exemplo (cont.)

Passo 2: Para resolver o sistema $Ux = c$ por substituição inversa (de baixo para cima):

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & -0.1x_2 & -0.2x_3 & = & 7.85 \\ & 7.003333x_2 & -0.293333x_3 & = & -19.561664 \\ & & 10.012042x_3 & = & 70.084292 \end{array}\right.$$

$$x_3 = \frac{70.084292}{10.012042} = 7 \; ,$$
$$x_2 = \frac{-19.561664 + 0.293333(7)}{7.003333} = -2.5 \; ,$$
$$x_1 = \frac{7.85 + 0.2(7) + 0.1(-2.5)}{3} = 3.$$

$$\text{solução: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Cálculo do determinante de uma matriz A

- utiliza-se EGPP para transformar A à forma U,
- $det(A) = (-1)^s \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$

  sendo s o número de trocas de linhas efetuadas na transformação de A em U.

Exemplo

Calcular o determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.2 & 10 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 3 & -0.1 & -0.2 \end{pmatrix}$$

Por EGPP $(A) \rightarrow (U)$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.003333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.012042 \end{pmatrix}$$

$det(A) = (-1)^1 \times 3 \times 7.003333 \times 10.012042 = -210.352994.$

Cálculo da inversa de uma matriz A

Dada $A_{n\times n}$, se $det(A) \neq 0$, existe A^{-1} - a matriz é não singular.
Quando $det(A) = 0$, A não tem inversa, A é singular.

- As n colunas de A^{-1} são as soluções dos n sistemas

$$AX = I \ (X_{n\times n}) \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}.$$

- utiliza-se EGPP para transformar $(A|I)$ à forma $(U|J)$
- resolvem-se os n sistemas - termos independentes são as colunas de J - por substituição inversa

Exemplo

Calcular A^{-1} sendo

$$A = \begin{pmatrix} 2.71 & 1.63 & 0.32 \\ 4.11 & 2.44 & 0.19 \\ 2.69 & 1.64 & 0.36 \end{pmatrix}$$

A matriz ampliada dos $n = 3$ sistemas é

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2.71 & 1.63 & 0.32 & 1 & 0 & 0 \\ 4.11 & 2.44 & 0.19 & 0 & 1 & 0 \\ 2.69 & 1.64 & 0.36 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Exemplo (cont.)

- **Etapa 1:**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4.11 & 2.44 & 0.19 & 0 & 1 & 0 \\ 2.71 & 1.63 & 0.32 & 1 & 0 & 0 \\ 2.69 & 1.64 & 0.36 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$m_{21} = -0.65937$ e $m_{31} = -0.65450 \quad \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4.11 & 2.44 & 0.19 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.02114 & 0.19472 & 1 & -0.65937 & 0 \\ 0 & 0.04302 & 0.23565 & 0 & -0.65450 & 1 \end{array}\right)$$

Exemplo (cont.)

- **Etapa 2:**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4.11 & 2.44 & 0.19 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.04302 & 0.23565 & 0 & -0.65450 & 1 \\ 0 & 0.02114 & 0.19472 & 1 & -0.65937 & 0 \end{array}\right)$$

$m_{32} = -0.49140 \quad \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4.11 & 2.44 & 0.19 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.04302 & 0.23565 & 0 & -0.65450 & 1 \\ 0 & 0 & 0.07892 & 1 & -0.33775 & -0.49140 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow (U|J)$$

Exemplo (cont.)

Resolver os $n = 3$ sistemas (substituição inversa):

$$Ux = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Ux = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.65450 \\ -0.33775 \end{pmatrix}, \quad Ux = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.49140 \end{pmatrix}$$

Soluções:

$$\begin{pmatrix} 40.62 \\ -69.40807 \\ 12.67106 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4.44403 \\ 8.22872 \\ -4.27965 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -33.76063 \\ 57.35214 \\ -6.22656 \end{pmatrix}$$

Assim:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 40.62 & 4.44403 & -33.76063 \\ -69.40807 & 8.22872 & 57.35214 \\ 12.67106 & -4.27965 & -6.22656 \end{pmatrix}$$

Exercício 1

Um engenheiro supervisiona a produção de 3 marcas de automóveis. Para a sua produção, são necessários 3 tipos de materiais: metal, tecido e borracha. As quantidades para produzir um carro de cada marca são:

carro	metal (lb/carro)	tecido (lb/carro)	borracha (lb/carro)
1	1500	25	100
2	1700	33	120
3	1900	42	160

Estão disponíveis por dia, respetivamente 106000, 2170, 8200 lb de metal, tecido e borracha. Quantos automóveis podem ser produzidos por dia?

a) Resolva o sistema por um método direto e estável (usando 4 casas decimais nos cálculos).

b) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes.

Resolução do Exercício 1

O sistema a resolver é dado por

$$\begin{cases} 1500x_1 + 1700x_2 + 1900x_3 = 106000 \\ 25x_1 + 33x_2 + 42x_3 = 2170 \\ 100x_1 + 120x_2 + 160x_3 = 8200 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$U = \begin{pmatrix} 1500.00000 & 1700.00000 & 1900.00000 \\ 0.00000 & 6.66667 & 33.33333 \\ 0.00000 & 0.00000 & -13.00000 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 106000.00000 \\ 1133.33333 \\ -390.00000 \end{pmatrix}$$

$x^* = (10, 20, 30)^T$

(b) det $= 130000$

Método iterativo de Gauss-Seidel

Equação iterativa

$$(D-L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b$$

$$D_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases} \quad \text{(elementos da diagonal principal de } A\text{)}$$

$$L_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{se} \quad i > j \\ 0 & \text{se} \quad i \leq j \end{cases}$$ (elementos abaixo da diagonal principal de A com os sinais trocados)

$$U_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{se} \quad i < j \\ 0 & \text{se} \quad i \geq j \end{cases}$$ (elementos acima da diagonal principal de A com os sinais trocados)

Critério de paragem

Erro relativo na aproximação

$$\frac{||x^{(k+1)} - x^{(k)}||}{||x^{(k+1)}||} \leq \epsilon_1$$

Resíduo

$$||Ax^{(k+1)} - b|| \leq \epsilon_2$$

Nota: a condição de resíduo é pouco usada na prática devido à necessidade de efetuar a multiplicação de uma matriz por um vetor, o que pode assumir um peso computacional significativo.

Algoritmo

1. ler aproximação inicial, $x^{(0)}$
2. $k \leftarrow 0$
3. repetir
4. $$(D - L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b$$
5. até (CP=verdadeiro)

Convergência do método iterativo de Gauss Seidel (GS)

- Seja o sistema linear $Ax = b$.
- Seja $C = (D - L)^{-1}U$ a matriz de iteração

Condições suficientes[1]

- A é estrita e diagonalmente dominante $\Rightarrow$ GS exibe convergência global;
- A simétrica e definida positiva $\Rightarrow$ GS exibe convergência global;
- $||C||_\infty < 1 \Rightarrow$ GS exibe convergência global;
- $||C||_1 < 1 \Rightarrow$ GS exibe convergência global.

[1] condições suficientes: $\begin{cases} \text{se V} & \rightarrow & \text{converge} \\ \text{se F} & \rightarrow & ? \end{cases}$

Se uma das condições for verdadeira, podemos afirmar que o Método de Gauss Seidel vai convergir, quando aplicado ao sisitema $Ax = b$.

Definições

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diz-se **simétrica** se $A = A^T$.

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diz-se **definida positiva** se $x^T Ax > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

- Para verificar se uma matriz é **definida positiva** é através do cálculo dos determinantes das submatrizes principais de A.
- Se todos estes determinantes forem positivos, então a matriz é **definida positiva**.
- Relembra-se que as submatrizes principais A_k de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são

$$A_k = \{(a_{ij})|i, j = 1, \ldots, k\} \qquad k = 1, \cdots, n.$$

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é **estrita e diagonalmente dominante** se

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Exercício 2

Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 0.5x_2 + x_3 = 5 \\ 0.5x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 = 6 \\ x_1 + 0.5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Estude a convergência do método iterativo de Gauss-Seidel quando aplicado ao sistema, através das condições suficientes.
2. Use o método iterativo de Gauss-Seidel para calcular a solução, com uma precisão (em termos relativos) igual a 1.
   Use como aproximação inicial o vetor $[0, 0, 0]^T$.

Resolução do Exercício 2

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A matriz A é estrita e diagonalmente dominante, pois o elemento de cada um dos valores da diagonal de A é superior à soma do valor absoluto dos outros elementos da linha.

$$\begin{array}{ll} |2| > |0.5| + |1| & \text{Verdadeiro} \\ |2| > |0.5| + |0.5| & \text{Verdadeiro} \\ |2| > |1| + |0.5| & \text{Verdadeiro} \end{array}$$

Um vez que esta condição é verdadeira, então não é preciso testar mais nenhuma condição, e podemos afirmar que o método de Gauss-Seidel vai convergir quando aplicado ao sistema.

b) $x = (2.5000, 2.3750, -1.8438)^T$

Exercício 3

Considere o sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Estude a convergência do método iterativo de Gauss-Seidel quando aplicado ao sistema, através das condições suficientes.
2. Use o método iterativo de Gauss-Seidel para calcular a solução, com uma precisão (em termos relativos) menor ou igual a 0.2. Use como aproximação inicial o vetor $(1, 1, 0)^T$.

Resolução do Exercício 3

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Condições suficientes de convergência
i) A matriz A é estrita e diagonalmente dominante ??

$$\begin{array}{ll} |5| > |1| + |1| & \text{Verdadeiro} \\ |4| > |3| + |1| & \text{Falso} \\ |6| > |3| + |3| & \text{Falso} \end{array}$$

Esta condição não é verdadeira, pelo que **nada se pode afirmar** quanto à convergência do método de Gauss-Seidel quando aplicado ao sistema.

Resolução do Exercício 3

ii) A matriz A é simétrica e definida positiva??

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \neq A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Como a matriz A não é simétrica ($A \neq A^T$), não vale a pena analisar se é definida positiva, e **nada se pode afirmar** quanto à convergência do método de Gauss-Seidel quando aplicado ao sistema

Nota: para analisar se a matriz A era definida positiva ter-se-ia que verificar que todos os determinantes das submatrizes fossem > 0.
Ou seja, $\det(A_{1\times1}) = 5 > 0$, $\det(A_{2\times2}) = 17 > 0$, $\det(A_{3\times3}) = 87 > 0$ então A é definida positiva.

Resolução do Exercício 3

iii) $||C_{GS}||_\infty < 1$??

$$C_{GS} = (D-L)^{-1}U$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \; L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \; U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & 0.15 & -0.1 \\ 0 & 0.025 & 0.15 \end{pmatrix}$$

$||C_{GS}||_\infty = \max(0.4, 0.25, 0.175) = 0.4$

Como $||C_{GS}||_\infty = 0.4 < 1$ é verdadeiro, então não é preciso testar mais nenhuma condição, e podemos afirmar que **o método de Gauss-Seidel vai convergir** quando aplicado ao sistema.

Resolução do Exercício 3

(b) Método de Gauss-Seidel usando a aproximação inicial $x^{(0)} = (1,1,0)^T$.
1ª iteração, $k = 0$
Resolver $(D - L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} x^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ -0.85 \end{pmatrix}$$

Erro relativo da aproximação

$$\frac{||x^{(1)} - x^{(0)}||_2}{||x^{(1)}||_2} \leq 0.2 \Leftrightarrow \frac{0.87892}{1.4739} = 0.59631 \leq 0.2 \text{ Falso}$$

Resolução do Exercício 3

2ª iteração, $k = 1$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ -0.85 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} x^{(2)} = \begin{pmatrix} 4.95 \\ 6.85 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 0.97 \\ -0.98 \end{pmatrix}$$

Erro relativo da aproximação

$$\frac{||x^{(2)} - x^{(1)}||_2}{||x^{(2)}||_2} \leq 0.2 \Leftrightarrow \frac{0.24062}{1.6975} = 0.14175 \leq 0.2 \quad \text{Verdadeiro}$$

Solução: $x = (0.99, 0.97, -0.98)^T$