Métodos Numéricos
Interpolação *spline*

Ana Maria A. C. Rocha

Departamento de Produção e Sistemas

Universidade do Minho

arocha@dps.uminho.pt

Interpolação segmentada (*piecewise*)

'spline' é uma função segmentada e é formada por vários polinómios ligados uns aos outros de uma maneira **contínua e suave**, isto é, existe continuidade na 'spline' nos pontos que unem as partes.

Os pontos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ chamam-se **nós interiores** e x_0 e x_n são os **nós exteriores** ou **fronteiras**.

Interpolação segmentada (*piecewise*)

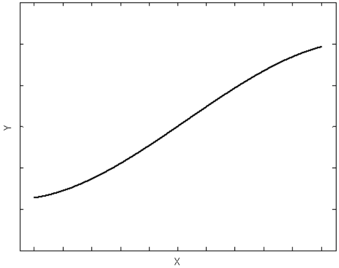
Uma função $s_l(x)$ (com l inteiro não negativo) chama-se 'spline' de grau l se possuir as seguintes propriedades:

(i) s_l é uma função continuamente diferenciável até à ordem $l-1$;

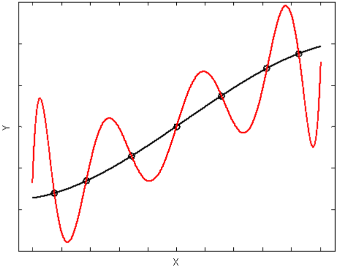
(ii) s_l é um polinómio de grau l para

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad 0 \leq i \leq n-1$$

Porquê usar splines?

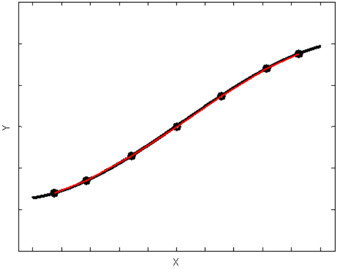


Porquê usar splines?



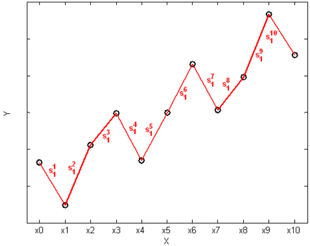
Polinómio interpolador de grau 10

Porquê usar splines?

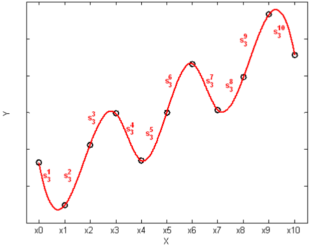


Spline linear

Exemplos



'spline' linear, s_1



'spline' cúbica, s_3

'Spline' linear, $s_1(x)$

- Junção de polinómios de grau 1.
- Para cada segmento i a forma do polinómio de grau 1 obtém-se:

$$s_1^i(x) = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

- O segmento i é definido por $[x_{i-1}, x_i]$

Limite superior do erro de truncatura com a aproximação 'spline' linear s_1

(i) Seja $f(x)$ contínua, com derivadas contínuas até à segunda ordem,

(ii) sejam os pontos do intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

(iii) seja $s_1(x)$ a 'spline' linear composta pelos polinómios de grau 1 $s_1^i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ para aproximar $f(x)$ em $[a, b]$,

Limite superior do erro de truncatura com a aproximação 'spline' linear s_1

(iv) seja

$$\max_{\xi \in [a,b]} \left| f''(\xi) \right| \leq M_2,$$

M_2 majorante da segunda derivada de $f(x)$ em $[a, b]$

(v) seja

$$h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

então

$$|f(x) - s_1(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 M_2$$

Nota: se $f(x)$ não for dada por uma expressão, substitui-se M_2 pela d.d. de 2^a ordem de maior módulo em valor absoluto multiplicada por 2!.

'Spline' cúbica $s_3(x)$

- Junção de polinómios de grau 3.
- Para cada segmento i a forma do polinómio de grau 3 é

$$s_3^i(x) = \frac{M_{i-1}}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{M_i}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3$$

$$+ \left[\frac{f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{M_{i-1}(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x)$$

$$+ \left[\frac{f_i}{x_i - x_{i-1}} - \frac{M_i(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1})$$

$i = 1, 2, \ldots, n,$
$f_i \equiv f(x_i)$
$M_i \equiv M(x_i)$, curvatura da 'spline' em x_i

'Spline' cúbica $s_3(x)$

- $s_3^i(x)$ depende de M_{i-1} e M_i
  - quando $i = 1$ (1^o segmento), precisamos de M_0 e M_1
  - $i = 2$, precisamos de M_1 e M_2
  - $i = 3$, precisamos de M_2 e M_3
  - $\cdots$
  - $i = n$, precisamos de M_{n-1} e M_n
- é preciso conhecer *a priori* as $n + 1$ incógnitas

$$M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n$$

'Spline' cúbica natural

- Os polinómios do 1^o segmento e do n^{esimo} (último) segmento devem ter curvatura nula nos nós da fronteira (x_0, x_n), ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} s_3^{1\prime\prime}(x_0) = 0 \\ s_3^{n\prime\prime}(x_n) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_0 = 0 \\ M_n = 0 \end{array} \right.$$

- Falta calcular $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ $(n-1$ incógnitas)
- através de $n-1$ equações, **para cada nó interior** i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$(x_i - x_{i-1})M_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})M_i + (x_{i+1} - x_i)M_{i+1} =$$

$$\frac{6}{x_{i+1} - x_i}(f_{i+1} - f_i) - \frac{6}{x_i - x_{i-1}}(f_i - f_{i-1}) \quad (1)$$

Estas $n-1$ equações nas $n-1$ incógnitas $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ definem um sistema linear tridiagonal a resolver por EGPP.

'Spline' cúbica completa

- Tem $n+1$ incógnitas para determinar: $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$, por isso precisa de $n+1$ equações.
- As equações (1) para os nós interiores são $n-1$
- As duas equações restantes $(n-1+2=n+1)$ dizem respeito aos **nós da fronteira (x_0 e x_n)**:

$$2(x_1 - x_0)M_0 + (x_1 - x_0)M_1 = \frac{6}{x_1 - x_0}(f_1 - f_0) - 6f_0'$$

$$2(x_n - x_{n-1})M_n + (x_n - x_{n-1})M_{n-1} = 6f_n' - \frac{6}{x_n - x_{n-1}}(f_n - f_{n-1})$$

'Spline' cúbica completa

Se não se conhecer a expressão de $f(x)$, para calcular $f'(x) \begin{cases} f'_0 \\ f'_n \end{cases}$ usam-se diferenças divididas de 1^a ordem para aproximar as primeiras derivadas:

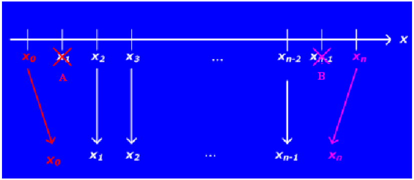
$$f'_0 = \frac{f_A - f_0}{A - x_0} \text{ e } f'_n = \frac{f_n - f_B}{x_n - B}$$

com $x_0 < A$ e $B < x_n$.

- Quanto mais próximo A estiver de x_0, melhor é a aproximação à derivada.
- Quanto mais próximo B estiver de x_n, melhor é a aproximação à derivada.

'Spline' cúbica completa

Neste caso, os pontos para construir a 'spline':



Limite superior do erro de truncatura com a aproximação 'spline' cúbica s_3

(i) Seja $f(x)$ contínua, com derivadas contínuas até à quarta ordem, em $[a, b]$,

(ii) sejam os pontos do intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

(iii) seja $s_3(x)$ a 'spline' cúbica completa composta pelos polinómios de grau 3, $s_3^i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (n segmentos) para aproximar $f(x)$ em $[a, b]$,

Limite superior do erro de truncatura em s_3

(iv) seja

$$\max_{\xi\in[a,b]} \left| f^{(iv)}(\xi) \right| \leq M_4,$$

M_4 majorante da quarta derivada de $f(x)$ em $[a, b]$

(v) seja

$$h = \max_{0\leq i\leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

então

$$|f(x) - s_3(x)| \leq \frac{5}{384} h^4 M_4$$

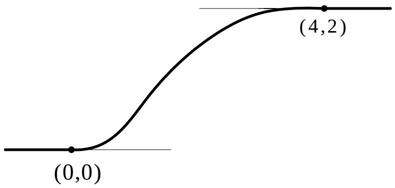
e

$$\left| f'(x) - s_3'(x) \right| \leq \frac{1}{24} h^3 M_4$$

Nota: se não for possível calcular a 4ª derivada da função, $f^{(iv)}(x)$, então M_4 é dada pelo majorante da diferença dividida de 4^a ordem (maior dd4 em valor absoluto) multiplicada por 4! (max $|\text{dd4}| \times 4! \leq M_4$).

Exercício 1

Considere um desvio entre duas linhas de caminho de ferro paralelas. O desvio agora deve corresponder a um polinómio de grau três que une os pontos $(0, 0)$ e $(4, 2)$, como mostra a figura.



Com base nos quatro pontos da tabela

x_i	-1	0	4	5
$f_i = f(x_i)$	0.4375	0	2	1.5625

construa a parte da *spline* cúbica natural que descreve a trajetória desenhada e calcule $f(2)$.

Resolução do Exercício 1

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	4	5
f_i	0.4375	0	2	1.5625
	extremo inferior	ponto interior	ponto interior	extremo superior

Como pretendemos determinar uma *spline* cúbica natural, então a curvatura nos extremos é nula, ou seja, $M_0 = 0$ e $M_3 = 0$ e apenas se constroem as equações para os pontos interiores ($i = 1$ e $i = 2$).

- Expressão para o ponto $i = 1$
  $(x_1 - x_0)M_0 + 2(x_2 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 = \frac{6}{(x_2-x_1)}(f_2 - f_1) - \frac{6}{(x_1-x_0)}(f_1 - f_0)$
- Expressão para o ponto $i = 2$
  $(x_2 - x_1)M_1 + 2(x_3 - x_1)M_2 + (x_3 - x_2)M_3 = \frac{6}{(x_3-x_2)}(f_3 - f_2) - \frac{6}{(x_2-x_1)}(f_2 - f_1)$

Resolução do Exercício 1 (cont.)

Simplificando as expressões, o sistema resultante é

$$\begin{cases} 10M_1 + 4M_2 = 5.625 \\ 4M_1 + 10M_2 = -5.625 \end{cases}$$

que se resolve por EGPP, e determina-se

$$\begin{cases} M_1 = 0.9375 \\ M_2 = -0.9375 \end{cases}$$

Como queremos estimar o valor de $f(2)$ através de uma *spline* cúbica natural, então verificamos que o ponto 2 encontra-se entre o ponto $x = 0$ e $x = 4$.

x	-1	0	4	5
f	0.4375	0	2	1.5625

Resolução do Exercício 1 (cont.)

Uma vez que temos um segmento de spline entre cada 2 pontos, então o ponto $x = 2$ localiza-se no 2^o segmento, ou seja no intervalo [0,4].

Seguidamente, constrói-se expressão do segmento $i = 2$ da *spline* cúbica

$$s_3^{(2)}(x) = \frac{M_1}{6(x_2 - x_1)}(x_2 - x)^3 + \frac{M_2}{6(x_2 - x_1)}(x - x_1)^3 + \left[\frac{f_1}{(x_2 - x_1)} - \frac{M_1(x_2 - x_1)}{6}\right](x_2 - x)$$
$$+ \left[\frac{f_2}{(x_2 - x_1)} - \frac{M_2(x_2 - x_1)}{6}\right](x - x_1)$$

Substituindo valores e simplificando

$$s_3^{(2)}(x) = 0.0390625(4 - x)^3 - 0.0390625x^3 - 0.625(4 - x) + 1.125x$$

Por fim, calcula-se $f(2) \approx s_3^{(2)}(2) = 1$.

Exercício 2

A seguinte função segmentada $s_3(x)$ no intervalo $[0, 3]$, representa o lucro obtido na venda de um produto sazonal.
No 1º mês de vendas, o lucro é representado por $s_3^1(x)$ e no 2º e 3º meses é descrito por $s_3^2(x)$.
Poderá a função segmentada $s_3(x)$ representar uma *spline* cúbica? Justifique.

$$s_3(x) = \begin{cases} s_3^1(x) = 3x^3 - x^2 + x - 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^2(x) = 2x^3 + 2x - 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Resolução do Exercício 2

Para que a função dada seja uma *spline*, no ponto interior ($x = 1$) deve haver continuidade até à 2^a ordem.
Por isso, devem ser idênticos:

- os valores da função
- os valores da primeira derivada
- os valores da segunda derivada

Ou seja, em $x = 1$ deve verificar-se

$$s_3^1(1) = s_3^2(1),\ s_3^{1'}(1) = s_3^{2'}(1),\ s_3^{1''}(1) = s_3^{2''}(1)$$

Resolução do Exercício 2 (cont.)

A função tem o mesmo valor para $x = 1$

$$s_3^1(1) = s_3^2(1) \quad \longleftrightarrow \quad 1 = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK}$$

Analisar a continuidade da primeira derivada de $s_3(x)$ no ponto $x = 1$. A expressão da primeira derivada é dada por:

$$s_3'(x) = \begin{cases} s_3^{1'}(x) = & 9x^2 - 2x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^{2'}(x) = & 6x^2 + 2, \quad 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$s_3^{1'}(1) = s_3^{2'}(1) \quad \longleftrightarrow \quad 8 = 8 \quad \longleftrightarrow \quad \text{OK}$$

Resolução do Exercício 2 (cont.)

Analisar a continuidade da segunda derivada de $S_3(x)$. A expressão da segunda derivada é dada por:

$$s_3''(x) = \begin{cases} s_3^{1''}(x) = & 18x - 2, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^{2''}(x) = & 12x, \quad\quad\;\; 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$s_3^{1''}(1) \neq s_3^{2''}(1) \quad \longleftrightarrow \quad 16 \neq 12$$

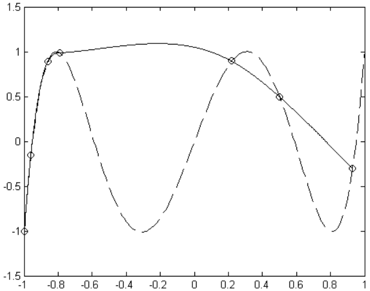
A segunda derivada de $s_3(x)$ tem valores diferentes para $x = 1$ em cada um dos segmentos.
Conclui-se que $s_3(x)$ não pode representar uma *spline* cúbica.

Exercício 3

A partir de uma experiência foram obtidos os seguintes valores de y em função da variável t:

t_i	-1	-0.96	-0.86	-0.79	0.22	0.5	0.93
y_i	-1	-0.151	0.894	0.986	0.895	0.5	-0.306

Foram calculados dois modelos, $M_1(t)$ baseado numa *spline* cúbica e $M_2(t)$ baseado num polinómio interpolador de Newton, para aproximar os dados, e que estão representados na figura.
Diga, justificando, a que modelo corresponde cada uma das linhas - a linha contínua e a linha a tracejado.



Resolução do Exercício 3

- M_1 corresponde à linha a cheio, uma vez que é formado por polinómios de grau 3 em cada segmento.
- M_2 é um polinómio interpolador de Newton de grau 6, que corresponde à linha a tracejado.