Universidade do Minho
Escola de Engenharia

CADERNO DE EXERCÍCIOS

Métodos Numéricos e Otimização Não Linear

Ano letivo de 2024/25

Otimização Não Linear

Otimização unidimensional - Método DSC

1. Tendo como objetivo fabricar latas cilíndricas com um volume de 1000 cm^3 e tapá-las em ambas as extremidades, qual deverá ser o raio da base e a altura da lata de modo a minimizar a quantidade de placa metálica, em termos de área superficial?

   Utilize o algoritmo de DSC, baseado na interpolação quadrática, com o valor inicial $r_1 = 7$, $\delta = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$ e $M = 0.5$.
   NOTA: Use a restrição do volume para eliminar uma das variáveis, por exemplo, $h = \frac{1000}{\pi r^2}$.

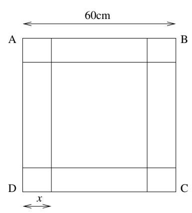
2. Na cidade de Ulam Bator surgiu uma epidemia de gripe asiática. A evolução da doença foi descrita pela fórmula
$$P(t) = e^{0.4t-0.01t^2}$$
   onde $P(t)$ representa a percentagem de pessoas doentes e t é o tempo em dias.

   Usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática), calcule o pior momento da epidemia identificando a percentagem de doentes nesse momento. Inicie o processo iterativo com $t_1 = 30$ dias. Considere ainda $\delta = 2$, $M = 0.05$ e $\varepsilon = 0.1$ (duas iterações).

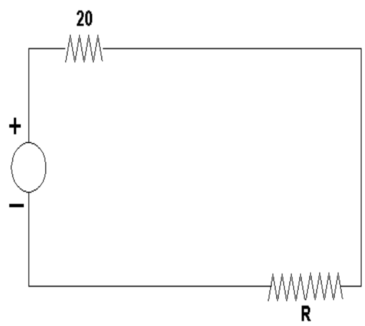
   Nota: Use 4 casas decimais nos cálculos.

3. [$ABCD$] representa uma cartolina quadrada de lado 60 cm. Pretende-se montar uma caixa de volume máximo cortando em cada canto um quadrado de lado x, como mostra a figura.

   Usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática), calcule x. Use duas casas decimais nos cálculos e inicie o processo iterativo com $x_1 = 5$. Considere ainda $\delta = 1$, $M = 0.5$ e $\varepsilon = 0.5$ (duas iterações).



4. Num circuito elétrico, a energia à saída da resistência R é dada por
$$P = \frac{10^4 R}{(R+20)^2}.$$
   Determine o valor de R que maximiza a energia de saída, utilizando o método de DSC baseado em interpolação quadrática. Utilize como valor inicial $R_1 = 15$, e os seguintes parâmetros de entrada: $\delta = 2$, $\varepsilon = 0.05$ e $M = 0.5$.



5. Uma empresa precisa de x_1 horas de equipamento ao preço (unitário) de 6 unidades monetárias (u.m.) e x_2 horas de mão-de-obra ao preço (unitário) de 2 u.m. para colocar no mercado um certo número de produtos. As horas de equipamento e mão-de-obra verificam a relação

$$x_1^2 + x_1 x_2 = 2500.$$

Petende-se calcular x_1 e x_2 de modo a minimizar os custos da empresa.

a) Comece por formular esta situação como um problema de otimização sem restrições de uma só variável (por exemplo, em função de x_1).
b) Resolva o problema usando o método DSC. Com a aproximação calculada identifique os valores obtidos para a outra variável e para o custo mínimo. Na implementação do DSC inicie o processo iterativo com $x_1 = 50$. Use $\delta = 5$, $\varepsilon = 0.05$ e $M = 0.1$.

Condições de otimalidade. Resolução analítica

6. Dada a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^4 - 32x_3 + 6x_1x_2 + 5x_2$$

verifique que ela tem apenas um ponto estacionário. Classifique-o.

7. Considere a função

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$$

Mostre que:

(a) a função dada tem um máximo local em $(-2, 0)$;
(b) a função dada tem um ponto sela em $(0, 0)$;
(c) a função dada não tem mínimos.

8. Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_1)^2 + x_1x_2$$

verifique se tem maximizantes, minimizantes e/ou pontos de sela.

9. Considere a função

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_1 + x_2^3 - 3x_2^2$$

Use as condições de otimalidade para calcular e classificar os pontos estacionários da função.

10. Use as condições de optimalidade para calcular os pontos estacionários da função:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy^2.$$

Com base na condição suficiente de 2^a ordem, classifique-os.

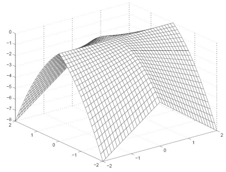
Otimização não diferenciável - Método Nelder-Mead

11. Calcule o máximo da seguinte função não diferenciável

$$f(x_1, x_2) = -|x_1x_2| - x_2^2$$

usando o método de Nelder-Mead.

Inicie o processo iterativo com o simplex:



$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Pare o processo iterativo usando $\varepsilon = 1.2$.

12. Calcule o mínimo da seguinte função não diferenciável

$$f(x_1, x_2) = \max((x_1 - 1)^2, x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2)$$

usando o método de Nelder-Mead. Inicie o processo iterativo com o seguinte simplex:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon = 0.5$.

13. Calcule o mínimo da seguinte função não diferenciável

$$f(x_1, x_2) = \max(|x_1|, |x_2 - 1|)$$

usando o método de Nelder-Mead. Inicie o processo iterativo com o seguinte simplex:

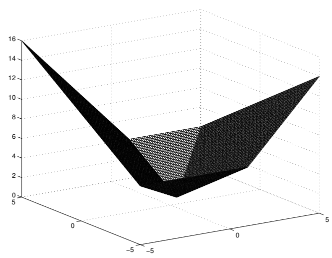
$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon = 0.5$.

14. Implemente o método que não requer cálculos das derivadas para resolver o problema não diferenciável

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \; f(x) \equiv |x_1 - 1| + |x_1 - x_2|.$$

Considere os seguintes pontos para iniciar o processo iterativo



$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

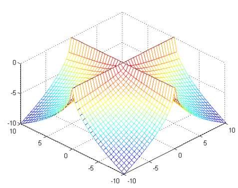
e use a tolerância $\varepsilon = 1$ no critério de paragem.

Use **4** casas decimais nos cálculos.

15. Considere a seguinte função de $\mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = -\sqrt{|x_1 x_2|}.$$

A partir do simplex:



$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

calcule o máximo de f considerando $\varepsilon = 0.5$.

Otimização diferenciável - Métodos do gradiente

16. Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + (2 - x_1)^2$$

calcule o seu mínimo usando o algoritmo de segurança de Newton.
O processo iterativo deve ser iniciado com o ponto $(1, 1)$ e deve terminar quando o critério de paragem for verificado para $\varepsilon = 0.1$. Considere $\eta = 0.0001$. Deve, também, implementar o algoritmo baseado no critério de Armijo para calcular o comprimento do passo α, em cada iteração e considere $\mu = 0.001$.

17. Considere a função

$$f(x_1, x_2) = -\sin(x_1 - 1) - x_2^4$$

Implemente, no máximo, duas iterações do método de segurança de Newton para determinar o máximo da função $f(x_1, x_2)$. Considere $\eta = 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$, $\varepsilon = 1$ e $x^{(1)} = (1, 1)^T$.

18. A soma de três números (x_1, x_2 e x_3) positivos é igual a 40. Determine esses números de modo que a soma dos seus quadrados seja mínima.

Use a relação da soma para colocar x_3 em função das outras 2 variáveis.

(a) Formule o problema como um problema de otimização sem restrições.

(b) A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (10, 10)$, use o método de Segurança de Newton (com $\eta = 0.00001$) para calcular esses números, considerando no critério de paragem $\varepsilon = 0.001$ (duas iterações). Na condição de Armijo tome $\mu = 0.001$.

19. Uma empresa fabrica e comercializa dois tipos de computadores portáteis. O custo de fabrico de cada um deles decresce à medida que o número de unidades produzidas aumenta e é dado pelas seguintes relações empíricas:

$$c_1 = 5 + \frac{1500}{x_1} \qquad c_2 = 7 + \frac{2500}{x_2},$$

em que x_1 e x_2 são o número de unidades de cada um dos portáteis produzidos. O preço de venda dos computadores é tanto menor quanto maior for o número de unidades produzidas, de acordo com as seguintes relações:

$$p_1 = 15 - 0.001x_1 \qquad p_2 = 25 - 0.0015x_2$$

(a) Formule o problema de otimização que consiste em determinar quantas unidades de cada computador a firma deve produzir de modo a maximizar os lucros.

(b) Resolva o problema usando o método de Segurança de Newton (com $\eta = 0.00001$). Considere a seguinte aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (20, 30)$ e $\varepsilon = 0.001$. No critério de Armijo tome $\mu = 0.001$.

(c) Com base na aproximação calculada na alínea anterior ao número de computadores produzidos, a empresa terá lucro?

20. Três estações elétricas vão fornecer energia, a uma certa região, da forma mais económica possível. Os custos individuais de operação de cada uma das estções são dados por

$$f_1 = 0.1 + 0.25x$$
$$f_2 = 0.08 + 0.12y + 0.00125y^2$$
$$f_3 = 0.05 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3$$

em que x, y e z são as energias fornecidas pelas três estações (em $MWatt$).

Calcule o custo total mínimo, sabendo que a energia total a ser fornecida é de 100 $MWatt$, recorrendo ao método de Segurança de Newton.

Como valores iniciais use $(x, y)^{(1)} = (30, 50)$, no critério de paragem considere $\varepsilon = 0.5$ e tome $\eta = 0.0001$. Como estratégia de procura unidimensional utilize o critério de Armijo com $\mu = 0.01$.

Nota: use a restrição relacionada com a energia a fornecer, para eliminar uma das variáveis, por exemplo $x = 100 - y - z$.

21. Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$$

calcule o seu mínimo usando o algoritmo quasi-Newton (fórmula de atualização DFP). O processo iterativo deve ser iniciado com o ponto $(1, 0)$ e deve terminar quando o critério de paragem for verificado para $\varepsilon = 0.02$. Para calcular o comprimento do passo α, use, em cada iteração o critério de Armijo com $\mu = 0.001$.

22. Numa situação monopolista, o rendimento de uma empresa face à venda de um produto ou serviço depende do nível de produção z. O rendimento é uma função crescente de z mas tende em direcção a uma assímptota assim que o mercado fica saturado.

Considere a seguinte função rendimento

$$R(z) = z^2/(1 + z^2)$$

que depende da produção z dada por $z = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, em que x_1 representa o capital e x_2 o trabalho. Supondo que a função lucro é dada por

$$\pi(x_1, x_2) = R(z) - 0.04x_1 - 0.06x_2$$

calcule o lucro máximo que a empresa pode ter. Use o método quasi-Newton (com fórmula BFGS). Como aproximação inicial use o ponto $(2, 1)$. Faça apenas duas iterações. Use na paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.1$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

23. Suponha que pretendia representar um número A positivo na forma de um produto de quatro factores positivos x_1, x_2, x_3 e x_4. Para $A = 2401$, determine esses factores de tal forma que a sua soma seja a menor possível.

(a) Formule o problema como um problema de otimização sem restrições.

(b) A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2, x_3)^{(1)} = (6, 7, 5)$, use o método quasi-Newton baseado para calcular esses factores (com fórmula DFP). Considere para paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.15$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

24. O lucro, em milhares de euros, da colocação de um sistema elétrico é dado por

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = 20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$$

em que x_1 e x_2 designam, respetivamente, o custo da mão de obra e do material. Calcule o lucro máximo usando o método quasi-Newton (com a fórmula DFP), considerando na paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.0001$. Tome a seguinte aproximação inicial $(0, 0)$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

25. Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^3$$

calcule o seu mínimo usando o método quasi-Newton (com fórmula de atualização BFGS). O processo iterativo deve ser iniciado com o ponto $(2, 1.1)$ e deve terminar quando $\varepsilon = 0.02$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.