Universidade do Minho
Escola de Engenharia

SOLUÇÕES DO CADERNO DE EXERCÍCIOS
Métodos Numéricos e Otimização Não Linear
Ano letivo de 2024/25

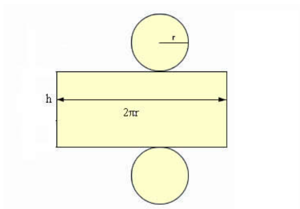
Otimização Não Linear

Otimização unidimensional - Método DSC

1. Tendo como objetivo fabricar latas cilíndricas com um volume de 1000 cm^3 e tapá-las em ambas as extremidades, qual deverá ser o raio da base e a altura da lata de modo a minimizar a quantidade de placa metálica, em termos de área superficial?

   Utilize o algoritmo de DSC, baseado na interpolação quadrática, com o valor inicial $r_1 = 7$, $\delta = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$ e $M = 0.5$.
   NOTA: Use a restrição do volume para eliminar uma das variáveis, por exemplo, $h = \frac{1000}{\pi r^2}$.

   Resolução



$$\begin{aligned}
\text{área Total} &= \text{área}_{\text{retângulo}} + 2 \times \text{área}_{\text{círculo}} \\
&= base \times h + 2\left(\pi r^2\right) \\
&= \text{Perímetro}_{\text{círculo}} \times h + 2\pi r^2 \\
&= 2\pi r h + 2\pi r^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Volume} &= \pi r^2 \times h \\
1000 &= \pi r^2 \times h
\end{aligned}$$

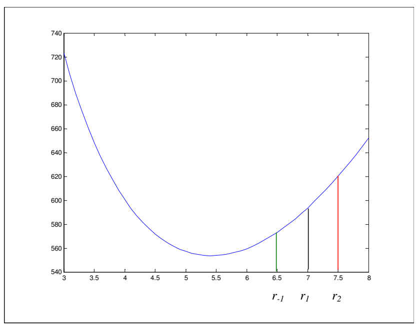
$$\min \quad \underbrace{2\pi r h + 2\pi r^2}_{A(r,h)}$$

$$\begin{aligned}
\text{Volume} &= \pi r^2 \times h \\
1000 &= \pi r^2 \times h \Longrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}
\end{aligned}$$

Substituindo em $A(r,h)$ vem $A(r) = 2\pi r \dfrac{1000}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \dfrac{2000}{r} + 2\pi r^2$

$$\begin{array}{ll}
\min & \dfrac{2000}{r} + 2\pi r^2 \\
\text{s.a} & r \in \mathbb{R}
\end{array}$$

1ª iteração Iniciar algoritmo DSC
$r_1 = 7, \delta = 0.5, \varepsilon = 0.3, M = 0.5$



$$\begin{cases} r_1 = 7 \\ A(r_1) = 593.5904 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_2 = 7 + 0.5 = 7.5 \\ A(r_2) = 620.0958 \end{cases}$$

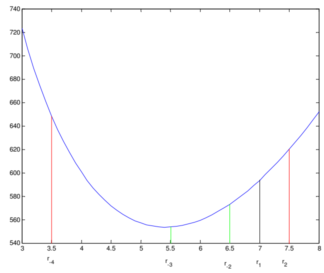
$A(r_2) > A(r_1) \Rightarrow$ sentido negativo

$$\begin{cases} r_{-1} = 7 - 0.5 = 6.5 \\ A(r_{-1}) = 573.1569 \end{cases}$$

$$A(r_{-1}) < A(r_1) \Rightarrow \begin{cases} r_{-2} = 6.5 - 2 \times 0.5 = 5.5 \\ A(r_{-2}) = 553.7027 \end{cases}$$

$$A(r_{-2}) < A(r_{-1}) \Rightarrow \begin{cases} r_{-3} = 5.5 - 4 \times 0.5 = 3.5 \\ A(r_{-3}) = 648.3976 \end{cases}$$

$A(r_{-3}) > A(r_{-2}) \Rightarrow$ PARAR.

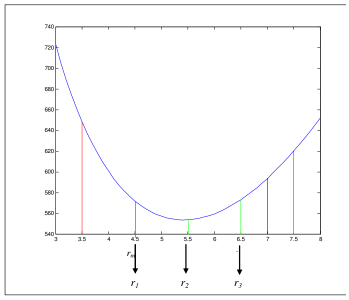


Calcular ponto médio.

$$\begin{cases} r_m = (5.5 + 6.5)/2 = 4.5 \\ A(r_m) = 571.6789 \end{cases}$$

Escolher 3 pontos igualmente espaçados.

$$\begin{cases} r_1 = 4.5 & A(r_1) = 571.6789 \\ r_2 = 5.5 & A(r_2) = 553.7027 \\ r_3 = 6.5 & A(r_3) = 573.1569 \end{cases}$$



Minimizante da quadrática

$$\begin{cases} r_{\min} = 5.4803 \\ A(r_{\min}) = 553.6508 \end{cases}$$

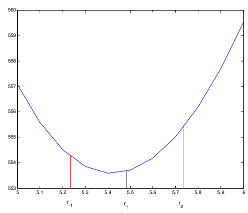
Testar CP: $(\Delta = (r_2 - r_1) = 1) \leq 0.3$

Falso, por isso fazer nova iteração.

2ª iteração

Fazer $\delta = M\delta = 0.5 \times 0.5 = 0.25$ e $r_{min} \rightarrow r_1$

$$\begin{cases} r_1 = 5.4803 \\ A(r_1) = 553.6508 \end{cases} \begin{cases} r_2 = 5.4803 + 0.25 = 5.7303 \\ A(r_2) = 555.3387 \end{cases}$$



Como $A(r_2) > A(r_1)$ então

$$\begin{cases} r_{-1} = 5.4803 - 0.25 = 5.2303 \\ A(r_{-1}) = 554.2703 \end{cases}$$

Como $A(r_{-1}) > A(r_1)$ então PARAR. Não é necessário calcular ponto médio.

Ordenar pontos. $\begin{cases} r_1 = 5.2303 & A(r_1) = 554.2703 \\ r_2 = 5.4803 & A(r_2) = 553.7027 \\ r_3 = 5.7303 & A(r_3) = 555.3387 \end{cases}$

Calcular minimizante da quadrática

$$\begin{cases} r_{\min} = 5.4224 \\ A(r_{\min}) = 553.5812 \end{cases}$$

Testar CP: $((r_2 - r_1) = 0.25) \leq 0.3 \Leftrightarrow$ Verdadeiro

Solução

$$\Rightarrow \begin{cases} r^* = 5.4224 \text{ e a altura } h^* = \dfrac{1000}{\pi r^2} = 12.06 \\ A(r^*) = 553.5812 \end{cases}$$

2. Na cidade de Ulam Bator surgiu uma epidemia de gripe asiática. A evolução da doença foi descrita pela fórmula

$$P(t) = e^{0.4t-0.01t^2}$$

onde $P(t)$ representa a percentagem de pessoas doentes e t é o tempo em dias.

Usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática), calcule o pior momento da epidemia identificando a percentagem de doentes nesse momento. Inicie o processo iterativo com $t_1 = 30$ dias. Considere ainda $\delta = 2$, $M = 0.05$ e $\varepsilon = 0.1$ (duas iterações).

Nota: Use 4 casas decimais nos cálculos.

Resolução

$\max P(t) = -\min(-P(t))$

Problema a resolver $\min f(t) = -e^{0.4t-0.01t^2}$

1ª iteração - Iniciar algoritmo DSC $t_1 = 30, \delta = 2, \varepsilon = 0.1, M = 0.05$

$$\begin{cases} t_1 = 30 \\ f(t_1) = -20.0855 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_2 = 30 + 2 = 32 \\ f(t_2) = -12.9358 \uparrow \end{cases}$$

$$f(t_2) > f(t_1) \Rightarrow \text{procurar sentido negativo} \Rightarrow \begin{cases} t_{-1} = 30 - 2 = 28 \\ f(t_{-1}) = -28.7892 \downarrow \end{cases}$$

$$f(t_{-1}) < f(t_1) \Rightarrow \begin{cases} t_{-2} = 28 - 2 \times 2 = 24 \\ f(t_{-2}) = -46.5255 \downarrow \end{cases}$$

$$f(t_{-2}) < f(t_{-1}) \Rightarrow \begin{cases} t_{-3} = 24 - 4 \times 2 = 16 \\ f(t_{-3}) = -46.5255 \end{cases}$$

$$f(t_{-3}) = f(t_{-2}) \Rightarrow \begin{cases} t_{-4} = 16 - 8 \times 2 = 0 \\ f(t_{-4}) = -1 \uparrow \end{cases} \Rightarrow f(t_{-4}) > f(t_{-3}) \Rightarrow \text{PARAR.}$$

$$\begin{cases} t_m = (0 + 16)/2 = 8 \\ f(t_m) = -12.9358 \end{cases} \Rightarrow \text{3 pontos igualmente espaçados} \begin{cases} t_1 = 8 & f(t_1) = -12.9358 \\ t_2 = 16 & f(t_2) = -46.5255 \\ t_3 = 24 & f(t_3) = -46.5255 \end{cases}$$

Minimizante da quadrática $\begin{cases} t_{\min} = 20 \\ f(t_{\min}) = -54.5982 \end{cases}$

Testar CP: $(\Delta = (t_2 - t_1) = 8) \leq 0.1$ Falso, por isso fazer nova iteração.

2ª iteração - $t_1 = 20, \delta = M\delta = 0.05 \times 2 = 0.1$

$$\begin{cases} t_1 = 20 \\ f(t_1) = -54.5982 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_2 = 20 + 0.1 = 20.1 \\ f(t_2) = -54.5927 \uparrow \end{cases}$$

$$f(t_2) > f(t_1) \Rightarrow \text{procurar sentido negativo} \Rightarrow \begin{cases} t_{-1} = 20 - 0.1 = 19.9 \\ f(t_{-1}) = -54.5927 \uparrow \end{cases}$$

Ordenar 3 pontos igualmente espaçados. $\begin{cases} t_1 = 19.9 & f(t_1) = -54.5927 \\ t_2 = 20 & f(t_2) = -54.5982 \\ t_3 = 20.1 & f(t_3) = -54.5927 \end{cases}$

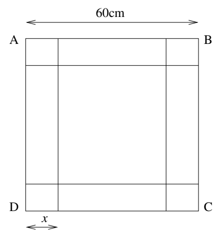
Minimizante da quadrática $\begin{cases} t_{\min} = 20 \\ f(t_{\min}) = -54.5982 \end{cases}$

Testar CP: $(\Delta = (t_2 - t_1) = 0.1) \leq 0.1$ Verdadeiro

Solução $\Rightarrow \begin{cases} t^* = 20 \\ f(t^*) = 54.5982 \end{cases}$

O pior momento é aos 20 dias com 54.5982% de pessoas doentes.

3. $[ABCD]$ representa uma cartolina quadrada de lado 60 cm.



Pretende-se montar uma caixa de volume máximo cortando em cada canto um quadrado de lado x, como mostra a figura.
Usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática), calcule x. Inicie o processo iterativo com $x_1 = 5$.
Considere ainda $\delta = 1$, $M = 0.5$ e $\varepsilon = 0.5$ (duas iterações).

Resolução

$v(x) = x(60 - 2x)^2 = x(3600 - 240x + 4x^2) = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$

$\max v(x) = -\min(-v(x))$

$\min f(x) = -(4x^3 - 240x^2 + 3600x)$

1ª iteração - Iniciar algoritmo DSC $x_1 = 5, \delta = 1, M = 0.5, \varepsilon = 0.5$

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ f(x_1) = -12500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5 + 1 = 6 \\ f(x_2) = -13824 \downarrow \end{cases}$$

$$f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 6 + 2 \times 1 = 8 \\ f(x_3) = -15488 \downarrow \end{cases}$$

$$f(x_3) < f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 8 + 4 \times 1 = 12 \\ f(x_4) = -15552 \downarrow \end{cases}$$

$$f(x_4) < f(x_3) \Rightarrow \begin{cases} x_5 = 12 + 8 \times 1 = 20 \\ f(x_5) = -8000 \uparrow \end{cases} \Rightarrow f(x_5) > f(x_4) \Rightarrow \text{PARAR.}$$

$$\begin{cases} x_m = (12 + 20)/2 = 16 \\ f(x_m) = -12544 \end{cases} \Rightarrow \text{3 pontos igualmente espaçados} \begin{cases} x_1 = 8 & f(x_1) = -15488 \\ x_2 = 12 & f(x_2) = -15552 \\ x_3 = 16 & f(x_3) = -12544 \end{cases}$$

Minimizante da quadrática $\begin{cases} x_{\min} = 10.08333 \\ f(x_{\min}) = -15999.169048 \end{cases}$

Testar CP: $(\Delta = (x_2 - x_1) = 4) \leq 0.5 \Rightarrow$ Falso, por isso fazer nova iteração.

2ª iteração - $x_1 = x_{min} = 10.08333, \delta = M\delta = 0.5 \times 1 = 0.5$

$$\begin{cases} x_1 = 10.08333 \\ f(x_1) = -15999.16905 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 10.08333 + 0.5 = 10.58333 \\ f(x_2) = -15959.96110 \uparrow \end{cases}$$

$$f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow \begin{cases} x_{-1} = 10.08333 - 0.5 = 9.58333 \\ f(x_{-1}) = -15978.87697 \downarrow \end{cases} \Rightarrow \text{3 pontos igualmente espaçados.}$$

$$\begin{cases} x_1 = 9.58333 & f(x_1) = -15978.87697 \\ x_2 = 10.08333 & f(x_2) = -15999.16905 \\ x_3 = 10.58333 & f(x_3) = -15959.96110 \end{cases}$$

Minimizante da quadrática

$$\begin{cases} x_{\min} = 10.00385 \\ f(x_{\min}) = -15999.99822 \end{cases}$$

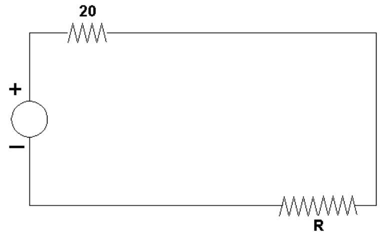
Testar CP: $(\Delta = (x_2 - x_1) = 0.5) \leq 0.5$ Verdadeiro

Solução: $\begin{cases} t^* = 10.00385 \\ f(t^*) = -15999.99822 \end{cases}$

O lado do quadrado $x \approx 10$ para uma caixa de volume $v \approx 16000$.

4. Num circuito elétrico, a energia à saída da resistência R é dada por

$$P = \frac{10^4 R}{(R+20)^2}.$$



Determine o valor de R que maximiza a energia de saída, utilizando o método de DSC baseado em interpolação quadrática. Utilize como valor inicial $R_1 = 15$, e os seguintes parâmetros de entrada: $\delta = 2$, $\varepsilon = 0.5$ e $M = 0.5$.

Resolução

$$\max P(R) = -\min(-P(R)) \;\Rightarrow\; \min f(x) = -\left(\frac{10^4 x}{(x+20)^2}\right)$$

1ª iteração - Iniciar algoritmo DSC $x_1 = 15, \delta = 2, M = 0.5, \varepsilon = 0.05$

$$\begin{cases} x_1 = 15 \\ f(x_1) = -122.44898 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 15 + 2 = 17 \\ f(x_2) = -124.17823 \downarrow \end{cases}$$

$$f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 17 + 2 \times 2 = 21 \\ f(x_3) = -124.92564 \downarrow \end{cases}$$

$$f(x_3) < f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 21 + 4 \times 2 = 29 \\ f(x_4) = -120.78300 \uparrow \end{cases} \Rightarrow f(x_4) > f(x_3) \Rightarrow \text{PARAR.}$$

$$\begin{cases} x_m = (21+29)/2 = 25 \\ f(x_m) = -123.45679 \end{cases} \Rightarrow \text{3 pontos igualmente espaçados} \begin{cases} x_1 = 17 & f(x_1) = -124.17823 \\ x_2 = 21 & f(x_2) = -124.92564 \\ x_3 = 25 & f(x_3) = -123.45679 \end{cases}$$

Minimizante da quadrática $\begin{cases} x_{\min} = 20.34896 \\ f(x_{\min}) = -124.99065 \end{cases}$

Testar CP: $(\Delta = (x_2 - x_1) = 4) \leq 0.5$. Falso, por isso fazer nova iteração.

2ª iteração - $x_1 = x_{min} = 21.00290, \delta = M\delta = 0.5 \times 2 = 1.0$

$$\begin{cases} x_1 = 20.34896 \\ f(x_1) = -124.99065 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 20.34896 + 1.0 = 21.34896 \\ f(x_2) = -124.86696 \uparrow \end{cases}$$

$$f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow \begin{cases} x_{-1} = 20.34896 - 1.0 = 19.34896 \\ f(x_{-1}) = -124.96578 \downarrow \end{cases}$$

$$\text{3 pontos} \begin{cases} x_1 = 19.34896 & f(x_1) = -124.96578 \\ x_2 = 20.34896 & f(x_2) = -124.99065 \\ x_3 = 21.34896 & f(x_3) = -124.86696 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{\min} = 20.01637 \\ f(x_{\min}) = -124.99998 \end{cases}$$

Testar CP: $(\Delta = (x_2 - x_1) = 1) \leq 0.5$ Falso, por isso fazer nova iteração.

3ª iteração - $x_1 = x_{min} = 20.01637, \delta = M\delta = 0.5 \times 1 = 0.5$

$$\begin{cases} x_1 = 20.01637 \\ f(x_1) = -124.99998 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 20.01637 + 0.5 = 20.51637 \\ f(x_2) = -124.97970 \uparrow \end{cases} f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow \begin{cases} x_{-1} = 20.01637 - 0 \\ f(x_{-1}) = -124.981 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 19.51637 & f(x_1) = -124.98128 \\ x_2 = 20.01637 & f(x_2) = -124.99998 \\ x_3 = 20.51637 & f(x_3) = -124.97970 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{\min} = 20.016367 \\ f(x_{\min}) = -124.99998 \end{cases}$$

Testar CP: $(\Delta = (x_2 - x_1) = 0.5) \leq 0.5$ Verdadeiro

Solução: $\begin{cases} x^* = 20.00624 \\ f(x^*) = -125.0 \end{cases}$

A resistência $R = 20.00624$ é a que maximiza a energia $P = 125$.

5. Uma empresa precisa de usar x_1 horas de equipamento ao preço (unitário) de 6 unidades monetárias (u.m.) e x_2 horas de mão-de-obra ao preço (unitário) de 2 u.m. para colocar no mercado um certo número de produtos. As horas utilizadas de equipamento e mão-de-obra verificam a relação
$$x_1^2 + x_1\, x_2 = 2500.$$
Petende-se calcular x_1 e x_2 de modo a minimizar os custos da empresa.

   a) Comece por formular esta situação como um problema de otimização sem restrições de uma só variável (por exemplo, em função de x_1).

   b) Resolva o problema usando o método DSC.Com a aproximação calculada identifique os valores obtidos para a outra variável e para o custo mínimo. Na implementação do DSC inicie o processo iterativo com $x_1 = 30$. Use $\delta = 5$, $\varepsilon = 0.05$ e $M = 0.1$.

Resolução

a) Formular o problema $\quad \begin{array}{ll} \min & 6x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & x_1^2 + x_1 x_2 = 2500 \end{array}$

A partir da restrição, e fazendo $x_2 = \dfrac{2500 - x_1^2}{x_1}$ então

O problema de otimização sem restrições é dado por: $\min f(x) = 6x + 2\dfrac{2500 - x^2}{x}$

b) **1ª iteração** - Iniciar algoritmo DSC $x_1 = 50, \delta = 5, \varepsilon = 0.05, M = 0.1$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 30 \\ f(x_1) = 286.66667 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 30 + 5 = 35 \\ f(x_2) = 282.85714 \downarrow \end{array} \right.$$

$$f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 35 + 2 \times 5 = 45 \\ f(x_3) = 291.11111 \uparrow \end{array} \right. \Rightarrow f(x_3) > f(x_2) \Rightarrow \text{PARAR.}$$

Calcular ponto médio.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_m = (35 + 45)/2 = 40 \\ f(x_m) = 285 \end{array} \right.$$

Escolher 3 pontos igualmente espaçados.

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 30 & f(x_1) = 286.66667 \\ x_2 = 35 & f(x_2) = 282.85714 \\ x_3 = 40 & f(x_3) = 285 \end{array} \right.$$

Minimizante da quadrática

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\min} = 34.99574 \\ f(x_{\min}) = 282.85749 \end{array} \right.$$

Testar CP: $(\Delta = (x_2 - x_1) = 5) \leq 0.05$

Falso, por isso fazer nova iteração.

2ª iteração - $x_1 = x_{min} = 34.99574, \delta = M\delta = 0.1 \times 5 = 0.5$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 34.99574 \\ f(x_1) = 282.85749 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 34.99574 + 0.5 = 35.49574 \\ f(x_2) = 282.84493 \downarrow \end{array} \right.$$

$$f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 35.49574 + 2 \times 0.5 = 36.49574 \\ f(x_{-1}) = 282.98525 \uparrow \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_m = (35.49574 + 36.49574)/2 = 35.99574 \\ f(x_m) = 282.88829 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 34.99574 & f(x_1) = 282.85749 \\ x_2 = 35.49574 & f(x_2) = 282.84493 \\ x_3 = 35.99574 & f(x_3) = 282.88829 \end{cases}$$

Minimizante da quadrática

$$\begin{cases} x_{\min} = 35.49582 \\ f(x_{\min}) = 282.84494 \end{cases}$$

Testar CP: $(\Delta = (x_2 - x_1) = 0.5) \leq 0.05$ Falso, por isso fazer nova iteração.

3ª iteração - $\delta = M\delta = 0.1 \times 0.5 = 0.05$

$$\begin{cases} x_1 = 35.49582 \\ f(x_1) = 282.84494 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 35.49582 + 0.05 = 35.54582 \\ f(x_2) = 282.84680 \uparrow \end{cases}$$

$$f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow \begin{cases} x_{-1} = 35.49582 - 0.05 = 35.44582 \\ f(x_{-1}) = 282.84363 \uparrow \end{cases}$$

$$\text{Ordenar 3 pontos} \begin{cases} x_1 = 35.44582 & f(x_1) = 282.84363 \\ x_2 = 35.49582 & f(x_2) = 282.84494 \\ x_3 = 35.54582 & f(x_3) = 282.84680 \end{cases}$$

Minimizante da quadrática

$$\begin{cases} x_{\min} = 35.49583 \\ f(x_{\min}) = 282.84494 \end{cases}$$

Testar CP: $(\Delta = (x_2 - x_1) = 0.05) \leq 0.05$ Verdadeiro

Solução: $\begin{cases} x^* = 35.49583 \\ f(x^*) = 282.84493 \end{cases}$

$x_1 \approx 35.49583$, $x_2 \approx 63.63968$ e o custo mínimo ≈ 340.25433.

Condições de otimalidade. Resolução analítica

6. Dada a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^4 - 32x_3 + 6x_1x_2 + 5x_2$$

verifique que ela tem apenas um ponto estacionário. Classifique-o.

Resolução

Determinar vetor gradiente, $\nabla f(x)$, e matriz Hessiana, $\nabla^2 f(x)$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 10x_1 + 6x_2 \\ 4x_2 + 6x_1 + 5 \\ 4x_3^3 - 32 \end{pmatrix} \text{ e } \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12x_3^2 \end{pmatrix}$$

- Resolver o sistema $\nabla f(x) = 0$

Da condição de 1^a ordem (resolução do sistema $\nabla f(x) = 0$) obtém-se

$$x^* = (7.5, -12.5, 2)^T \text{ é ponto estacionário de } f(x_1, x_2, x_3).$$

Da condição de 2^a ordem

$$\nabla^2 f(x^*) = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det(\nabla^2 f_1) = 10 > 0 \\ \det(\nabla^2 f_2) = 4 > 0 \\ \det(\nabla^2 f_3) = 192 > 0 \end{cases}$$

Como $\nabla^2 f(x^*)$ é definida positiva, então $x^* = (7.5, -12.5, 2)^T$ é minimizante.

7. Considere a função
$$f\left(x,y\right)=3x^2-y^2+x^3$$
Mostre que:

(a) a função dada tem um máximo local em $(-2,0)$;

(b) a função dada tem um ponto sela em $(0,0)$;

(c) a função dada não tem mínimos.

Resolução

Determinar vetor gradiente, $\nabla f\left(x\right)$, e matriz Hessiana, $\nabla^2 f\left(x\right)$
$$\nabla f\left(x\right)=\begin{pmatrix} 6x+3x^2 \\ -2y \end{pmatrix} \text{ e } \nabla^2 f\left(x\right)=\begin{pmatrix} 6+6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Para $\hat{x}=(-2,0)^T$, da condição de 1^a ordem
$$\nabla f\left(\hat{x}\right)=(0,0)^T$$
então $\hat{x}$ é ponto estacionário.

Da condição de 2^a ordem
$$\nabla^2 f\left(\hat{x}\right)=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det\left(\nabla^2 f_1\right)=-6<0 \\ \det\left(\nabla^2 f_2\right)=12>0 \end{cases} \Rightarrow \nabla^2 f(\hat{x}) \text{ é definida negativa}$$

Então $\hat{x}=(-2,0)^T$ é maximizante.

(b) Para $\bar{x}=(0,0)^T$, da condição de 1^a ordem
$$\nabla f\left(\bar{x}\right)=(0,0)^T$$
então $\bar{x}$ é ponto estacionário. Da condição de 2^a ordem
$$\nabla^2 f\left(\bar{x}\right)=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det\left(\nabla^2 f_1\right)=6>0 \\ \det\left(\nabla^2 f_2\right)=-12<0 \end{cases} \Rightarrow \nabla^2 f(\bar{x}) \text{ é indefinida}$$

Então $\bar{x}=(0,0)^T$ é ponto sela.

(c) Determinação dos pontos estacionários

Da condição de 1^a ordem (resolução do sistema $\nabla f\left(x\right)=0$) temos que
$$\hat{x}=(-2,0)^T \text{ e } \bar{x}=(0,0)^T \text{ são pontos estacionários.}$$

A função não tem mínimos, pois os pontos estacionários, únicos candidatos a minimizantes, não verificam as condições necessárias e suficientes para serem minimizantes.

8. Dada a função $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ definida por
$$f\left(x_1,x_2\right)=x_1^2(1-x_1)^2+x_1x_2$$
verifique se tem maximizantes, minimizantes e/ou pontos de sela.

Resolução

Determinar vetor gradiente, $\nabla f\left(x\right)$
$$\nabla f\left(x_1,x_2\right)=\begin{pmatrix} 2x_1(1-x_1)^2-2x_1^2(1-x_1)+x_2 \\ \\ x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-x_1)(2x_1-4x_1^2)+x_2 \\ \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Da condição de 1^a ordem $\Rightarrow$ resolução do sistema $\nabla f(x_1,x_2)=0$

$$\nabla f(x_1,x_2)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (1-x_1)(2x_1-4x_1^2)+x_2=0 \\ \\ x_1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_2=0 \\ \\ x_1=0 \end{array}\right.$$

$$x^*=(0,0)^T \text{ é ponto estacionário de } f(x_1,x_2).$$

Determinar matriz Hessiana, $\nabla^2 f(x_1,x_2)$

$$\nabla^2 f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} -(2x_1-4x_1^2)+(1-x_1)(2-8x_1) & 1 \\ \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12x_1^2-12x_1+2 & 1 \\ \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da condição de 2^a ordem

$$\nabla^2 f(x^*)=\nabla^2 f(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \det\left(\nabla^2 f_1\right)=2>0 \\ \det\left(\nabla^2 f_2\right)=-1<0 \end{array}\right.$$

Como $\nabla^2 f(x^*)$ é indefinida, então $x^*=(0,0)^T$ é ponto de sela.

9. Considere a função

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+5x_1+x_2^3-3x_2^2$$

Use as condições de otimalidade para calcular e classificar os pontos estacionários da função.

Resolução

Determinação do vector gradiente e matriz Hessiana da função:

$$\nabla f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 2x_1+5 \\ 3x_2^2-6x_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla^2 f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6x_2-6 \end{pmatrix}$$

Da condição de 1^a ordem (resolução do sistema $\nabla f(x_1,x_2)=0$) temos que

$$\left\{\begin{array}{c} 2x_1+5=0 \\ 3x_2^2-6x_2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1=-5/2 \\ x_2(3x_2-6)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1=-5/2 \\ x_2=0 \quad \text{ou} \quad x_2=2 \end{array}\right.$$

Para $x_1=-5/2 \Rightarrow x_2=0 \quad$ ou $\quad x_2=2$

Assim,

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{x}=(-5/2,0) \\ \bar{x}=(-5/2,2) \end{array}\right. \quad \text{são pontos estacionários de } f(x_1,x_2).$$

Para $\hat{x}=(-5/2,0)$, da condição de 2^a ordem:

$$\nabla^2 f(x^*)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \det\left(\nabla^2 f_1\right)=2>0 \\ \det\left(\nabla^2 f_2\right)=-12<0 \end{array}\right.$$

Como $\nabla^2 f(\hat{x})$ é indefinida, então $\hat{x}=(-5/2,\ 0)$ é ponto de sela.

Para $\bar{x}=(-5/2,2)$, da condição de 2^a ordem:

$$\nabla^2 f(\hat{x})=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \det\left(\nabla^2 f_1\right)=2>0 \\ \det\left(\nabla^2 f_2\right)=12>0 \end{array}\right.$$

Como $\nabla^2 f(\bar{x})$ é definida positiva então $\bar{x}=(-5/2,2)$ é minimizante.

10. Use as condições de optimalidade para calcular os pontos estacionários da função:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy^2.$$

Com base na condição suficiente de 2^a ordem, classifique-os.

Resolução

Determinação do vector gradiente e matriz Hessiana da função:

$$\nabla f\,(x) = \begin{pmatrix} 2x - y^2 \\ 2y - 2xy \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla^2 f\,(x) = \begin{pmatrix} 2 & -2y \\ -2y & 2-2x \end{pmatrix}$$

Da condição de 1^a ordem (resolução do sistema $\nabla f\,(x) = 0$) temos que

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 0 \\ 2y - 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y^2 \\ 2y(1-x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \quad\quad\quad \ldots \\ x = 1 \quad \text{ou} \quad y = 0 \end{cases}$$

Para $x = 1 \Rightarrow (y = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{2})$ e para $y = 0 \Rightarrow x = 0$

Assim,

$$\begin{cases} x^* = (0,0) \\ \hat{x} = \left(1, \sqrt{2}\right) \\ \bar{x} = \left(1, -\sqrt{2}\right) \end{cases} \quad \text{são pontos estacionários de } f\,(x,y)\,.$$

Para $x^* = (0,0)$, da condição de 2^a ordem:

$$\nabla^2 f\,(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det\left(\nabla^2 f_1\right) = 2 > 0 \\ \det\left(\nabla^2 f_2\right) = 4 > 0 \end{cases}$$

Como $\nabla^2 f(x^*)$ é definida positiva, então $x^* = (0,\ 0)$ é minimizante.

Para $\hat{x} = \left(1, \sqrt{2}\right)$, da condição de 2^a ordem:

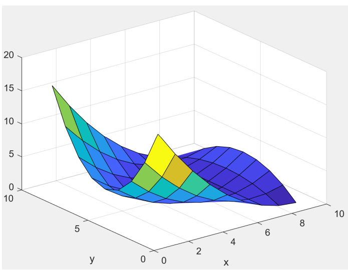
$$\nabla^2 f\,(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det\left(\nabla^2 f_1\right) = 2 > 0 \\ \det\left(\nabla^2 f_2\right) = -8 < 0 \end{cases}$$

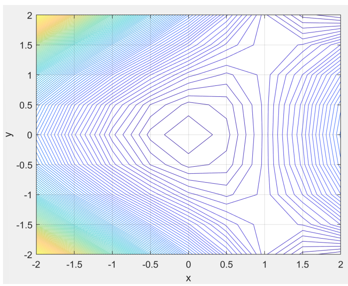
Como $\nabla^2 f(\hat{x})$ é indefinida então $\hat{x} = \left(1, \sqrt{2}\right)$ é ponto de sela.

Para $\bar{x} = \left(1, -\sqrt{2}\right)$, da condição de 2^a ordem:

$$\nabla^2 f\,(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det\left(\nabla^2 f_1\right) = 2 > 0 \\ \det\left(\nabla^2 f_2\right) = -8 < 0 \end{cases}$$

Como $\nabla^2 f(\bar{x})$ é indefinida então $\bar{x} = \left(1, \sqrt{2}\right)$ é ponto de sela..





Otimização não diferenciável - Método Nelder-Mead

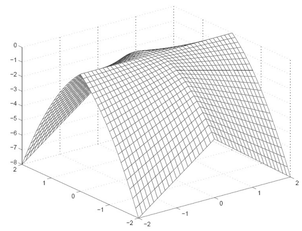
11. Calcule o máximo da seguinte função não diferenciável

$$f(x_1, x_2) = -|x_1 x_2| - x_2^2$$

usando o método de Nelder-Mead.

Inicie o processo iterativo com o simplex:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$



Pare o processo iterativo usando $\varepsilon = 1.2$.

Resolução

Transformar o problema de maximização em minimização

$$\min f(x_1, x_2) = |x_1 x_2| + x_2^2$$

$\begin{cases} x_1 = (-1, 1)^T \\ f(x_1) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = (1, 0)^T \\ f(x_2) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = (-1, -1)^T \\ f(x_3) = 2 \end{cases}$

1^a iteração $S_1 = \left\langle \begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right\rangle$

$\bar{x} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) = (0, 0.5)^T$ $\begin{cases} x_r = 2\bar{x} - X_3 = (1, 2)^T \\ f(x_r) = 6 \end{cases}$

$f(x_r) \geq f(X_3) \Rightarrow x_r$ é muito fraco $\Rightarrow$ calcular x_c (contraído para o interior)

$\begin{cases} x_c = 0.5X_3 + (1 - 0.5)\bar{x} = (-0.5, -0.25)^T \\ f(x_c) = 0.1875 \end{cases}$ $f(x_c) < f(X_2) \Rightarrow x_c$ é bom $\Rightarrow$ aceitar x_c

Novo simplex (já ordenado) $S_2 = \left\langle \begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 & 0.1875 & 2 \end{array} \right\rangle$

Testar critério de paragem

$\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = \max(1, 1) = 1$

$\frac{1}{\Delta}\max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{1}{1}\max(1.5207, 2.2361)$
$= 2.2361 \leq 1.2$ Falso, nova iteração

2^a iteração

$\bar{x} = \frac{(X_1 + X_2)}{2} = (0.25, -0.125)^T$ $\begin{cases} x_r = 2\bar{x} - X_3 = (1.5, -1, 25)^T \\ f(x_r) = 3.4375 \end{cases}$

$f(x_r) \geq f(X_3) \Rightarrow x_r$ é muito fraco $\Rightarrow$ calcular x_c (contraído para o interior)

$\begin{cases} x_c = 0.5X_3 + (1 - 0.5)\bar{x} = (-0.3750, 0.4375)^T \\ f(x_c) = 0.3555 \end{cases}$

Como $f(x_c) \geq f(X_2) \Rightarrow$ encolher o simplex

$x_2 = \frac{(X_1+X_2)}{2} = (0.25, -0.125)^T$ e $f(x_2) = 0.0469$

$x_3 = \frac{(X_1+X_3)}{2} = (0, 0.5)^T$ e $f(x_3) = 0.25$

Novo simplex (já ordenado)

$$S_3 = \left\langle \overset{X_1}{\underset{0}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \overset{X_2}{\underset{0.0469}{\begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.125 \end{pmatrix}}}, \overset{X_3}{\underset{0.25}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}}} \right\rangle$$

Testar critério de paragem:

$\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = \max(1, 1) = 1$

$\frac{1}{\Delta} \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{1}{1} \max(0.7603, 1.118) = 1.118 \leq 1.2$ Verdadeiro

Solução: $\begin{cases} x^* = (1, 0)^T \\ f(x^*) = 0 \end{cases}$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolx',1.2);
x0=[1;1];
fun = @(x)abs(x(1)*x(2))+x(2)^2;
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminsearch(fun,x0,op)
```

12. Calcule o mínimo da seguinte função não diferenciável

$$f(x_1, x_2) = \max((x_1 - 1)^2, x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2)$$

usando o método de Nelder-Mead. Inicie o processo iterativo com o seguinte simplex:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon = 0.5$.

Resolução

$$\min f(x_1, x_2) = \max((x_1 - 1)^2, x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2)$$

$\begin{cases} x_1 = (1, 1)^T \\ f(x_1) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = (0, 0)^T \\ f(x_2) = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = (1, 0)^T \\ f(x_3) = 5 \end{cases}$

1^a iteração $S_1 = \left\langle \overset{X_1}{\underset{1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \overset{X_2}{\underset{4}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \overset{X_3}{\underset{5}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \right\rangle$

$\bar{x} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) = (0.5, 0.5)^T$ $\begin{cases} x_r = 2\bar{x} - X_3 = (0, 1)^T \\ f(x_r) = 1 \end{cases}$

$f(X_1) \geq f(x_r) < f(X_2) \Rightarrow x_r$ é bom $\Rightarrow$ aceitar x_r

Novo simplex (já ordenado) $S_2 = \left\langle \overset{X_1}{\underset{1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \overset{X_2}{\underset{1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \overset{X_3}{\underset{4}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} \right\rangle$

Testar critério de paragem

$\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = \max(1, 1.41421) = 1.41421$

$$\frac{1}{\Delta}\max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{1}{1.41421}\max(1, 1.41421)$$
$$= 1 \leq 0.5 \text{ Falso, nova iteração}$$

2^a iteração

$\bar{x} = \frac{(X_1+X_2)}{2} = (0.5, 1.0)^T \quad \begin{cases} x_r = 2\bar{x} - X_3 = (1.0, 2.0)^T \\ f(x_r) = 5.0 \end{cases}$

$f(x_r) \geq f(X_3) \Rightarrow x_r$ é muito fraco $\Rightarrow$ calcular x_c (contraído para o interior)

$$\begin{cases} x_c = 0.5X_3 + (1-0.5)\bar{x} = (0.25, 0.5)^T \\ f(x_c) = 1.0625 \end{cases}$$

Como $f(x_c) \geq f(X_2) \Rightarrow$ encolher o simplex

$x_2 = \frac{(X_1+X_2)}{2} = (0.5, 1.0)^T$ e $f(x_2) = 0.25$

$x_3 = \frac{(X_1+X_3)}{2} = (0.5, 0.5)^T$ e $f(x_3) = 1.25$

Novo simplex (já ordenado)

$$S_3 = \left\langle \underset{0.25}{\overset{X_1}{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \underset{1}{\overset{X_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \underset{1.25}{\overset{X_3}{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}}} \right\rangle$$

Testar critério de paragem:

$\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = \max(1, 1.11803) = 1.11803$

$\frac{1}{\Delta}\max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{1}{1.11803}\max(0.5, 0.5) = 0.4472 \leq 0.5$

Solução: $\begin{cases} x^* = (0.5, 1)^T \\ f(x^*) = 0.25 \end{cases}$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolx',0.5);
x0=[1;1];
fun = @(x)max((x(1)-1)^2,x(1)^2+4*(x(2)-1)^2);
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminsearch(fun,x0,op)
```

13. Calcule o mínimo da seguinte função não diferenciável

$$f(x_1, x_2) = \max(|x_1|, |x_2 - 1|)$$

usando o método de Nelder-Mead. Inicie o processo iterativo com o seguinte simplex:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon = 0.75$.

Resolução

$$\min f(x_1,x_2) = \max(|x_1|, |x_2 - 1|$$

$\begin{cases} x_1 = (1,1)^T \\ f(x_1) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = (-1,1)^T \\ f(x_2) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = (0.5,0)^T \\ f(x_3) = 1 \end{cases}$

1^a iteração $S_1 = \left\langle \underset{1}{\overset{X_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \underset{1}{\overset{X_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \underset{1}{\overset{X_3}{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}}} \right\rangle$

$\bar{x} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) = (0,1)^T$ $\begin{cases} x_r = 2\bar{x} - X_3 = (-0.5,2)^T \\ f(x_r) = 1 \end{cases}$

$f(x_r) \geq f(X_3) \Rightarrow x_r$ é muito fraco $\Rightarrow$ calcular x_c (contraído para o interior)

$\begin{cases} x_c = 0.5X_3 + (1-0.5)\bar{x} = (0.25, 0.5)^T \\ f(x_c) = 0.5 \end{cases}$ $f(x_c) < f(X_2) \Rightarrow x_c$ é bom $\Rightarrow$ aceitar x_c

Novo simplex (já ordenado) $S_2 = \left\langle \underset{0.5}{\overset{X_1}{\begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix}}}, \underset{1}{\overset{X_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \underset{1}{\overset{X_3}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}} \right\rangle$

Testar critério de paragem

$\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = \max(1, 0.5590) = 1$

$\frac{1}{\Delta}\max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{1}{1}\max(0.9014, 1.3463)$

$= 1.3463 \leq 0.75$ Falso, nova iteração

2^a iteração

$\bar{x} = \frac{(X_1+X_2)}{2} = (0.625, 0.75)^T$ $\begin{cases} x_r = 2\bar{x} - X_3 = (2.25, 0.5)^T \\ f(x_r) = 2.25 \end{cases}$

$f(x_r) \geq f(X_3) \Rightarrow x_r$ é muito fraco $\Rightarrow$ calcular x_c (contraído para o interior)

$\begin{cases} x_c = 0.5X_3 + (1-0.5)\bar{x} = (-0.1875, 0.875)^T \\ f(x_c) = 0.1875 \end{cases}$

$f(x_c) < f(X_2) \Rightarrow x_c$ é bom $\Rightarrow$ aceitar x_c

Novo simplex (já ordenado)

$S_3 = \left\langle \underset{0.1875}{\overset{X_1}{\begin{pmatrix} -0.1875 \\ 0.875 \end{pmatrix}}}, \underset{0.5}{\overset{X_2}{\begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix}}}, \underset{1}{\overset{X_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}} \right\rangle$

Testar critério de paragem:

$\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = \max(1, 0.8949) = 1$

$\frac{1}{\Delta}\max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{1}{1}\max(0.5762, 1.1941) = 1.1941 \leq 0.75$

3^a iteração

$\bar{x} = \frac{(X_1+X_2)}{2} = (0.03125, 0.68755)^T$ $\begin{cases} x_r = 2\bar{x} - X_3 = (-0.9375, 0.3750)^T \\ f(x_r) = 0.9375 \end{cases}$

$f(x_r) \geq f(X_3) \Rightarrow x_r$ é muito fraco $\Rightarrow$ calcular x_c (contraído para o exterior)

$$\begin{cases} \hat{x}_c = 0.5 x_r + (1-0.5)\,\bar{x} = (-0.45315, 0.53125)^T \\ f(x_c) = 0.46875 \end{cases}$$

$f(\hat{x}_c) < f(X_2) \Rightarrow \hat{x}_c$ é bom $\Rightarrow$ aceitar $\hat{x}_c$

Novo simplex (já ordenado)

$$S_3 = \left\langle \begin{array}{c} X_1 \\ \begin{pmatrix} -0.1875 \\ 0.875 \end{pmatrix} \\ 0.1875 \end{array}, \begin{array}{c} X_2 \\ \begin{pmatrix} -0.45315 \\ 0.53125 \end{pmatrix} \\ 0.46875 \end{array}, \begin{array}{c} X_3 \\ \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix} \\ 0.5 \end{array} \right\rangle$$

Testar critério de paragem:

$\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = \max(1, 0.8949) = 1$

$\frac{1}{\Delta} \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{1}{1} \max(0.4344, 0.5762) = 0.5762 \leq 0.75$

$$\text{Solução: } \begin{cases} x^* = \begin{pmatrix} -0.1875 \\ 0.875 \end{pmatrix} \\ \\ f(x^*) = 0.1875 \end{cases}$$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolx',0.75);
x0=[-1;1];
fun = @(x)max(abs(x(1)),abs(x(2)-1));
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminsearch(fun,x0,op)
```

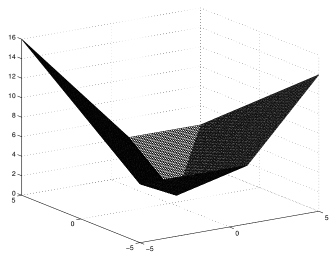
14. Implemente o método que não requer cálculos das derivadas para resolver o problema não diferenciável

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \; f(x) \equiv |x_1 - 1| + |x_1 - x_2|.$$

Considere os seguintes pontos para iniciar o processo iterativo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e use a tolerância $\varepsilon = 1$ no critério de paragem.



Resolução

$$\min f(x_1, x_2) = |x_1 - 1| + |x_1 - x_2|$$

$$\begin{cases} x_1 = (1, -1)^T \\ f(x_1) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = (0, 0)^T \\ f(x_2) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = (2, 1)^T \\ f(x_3) = 1 \end{cases}$$

Ordenar simplex

$$S_1 = \left\langle \begin{array}{c} X_1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} X_2 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} X_3 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ 2 \end{array} \right\rangle$$

1^a iteração

$\bar{x} = \frac{1}{2}\left(X_1 + X_2\right) = (1, 0.5)^T \qquad \begin{cases} x_r = 2\bar{x} - X_3 = (1,2)^T \\ f\left(x_r\right) = 1 \end{cases}$

$f\left(x_r\right) < f\left(X_3\right)$ e
$f\left(x_r\right) \geq f\left(X_2\right) \Rightarrow x_r$ é fraco $\Rightarrow$ calcular $\hat{x}_c$ (contraído para o exterior)

$$\begin{cases} \hat{x}_c = 0.5x_r + (1-0.5)\,\bar{x} = (1, 1.25)^T \\ f\left(x_c\right) = 0.25 \end{cases}$$

$f\left(\hat{x}_c\right) < f\left(X_2\right) \Rightarrow \hat{x}_c$ é bom $\Rightarrow$ aceitar $\hat{x}_c$

Novo simplex (já ordenado)

$$S_2 = \left\langle \begin{array}{c} X_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1.25 \end{pmatrix} \\ 0.25 \end{array}, \begin{array}{c} X_2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} X_3 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 \end{array} \right\rangle$$

Testar critério de paragem

$\Delta = \max\left(1, \|X_1\|_2\right) = \max\left(1, 1.6008\right) = 1.6008$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta}\max\left(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2\right) &= \frac{1}{1.6008}\max\left(1.6008, 1.0308\right) \\ &= 1 \leq 1 \text{ Verdadeiro} \end{aligned}$$

$$\text{Solução: } \begin{cases} x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.25 \end{pmatrix} \\ f\left(x^*\right) = 0.25 \end{cases}$$

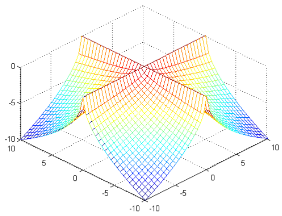
Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolx',1);
x0=[1;-1];
fun = @(x)abs(x(1)-1)+abs(x(1)-x(2));
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminsearch(fun,x0,op)
```

15. Considere a seguinte função de $\mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = -\sqrt{|x_1 x_2|}.$$

calcule o máximo de f considerando $\varepsilon = 0.5$.
Inicie o método Nelder-Mead a partir de:



$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Resolução

$$\min f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$$

$$\begin{cases} x_1 = (-1,-1)^T \\ f\left(x_1\right) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = (0,0)^T \\ f\left(x_2\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = (1,1)^T \\ f\left(x_3\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad S_1 = \left\langle \begin{array}{c} X_1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \end{array}, \begin{array}{c} X_2 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} X_3 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 \end{array} \right\rangle$$

1^a iteração

$\bar{x} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) = (-0.5, -0.5)^T \qquad \begin{cases} x_r = 2\bar{x} - X_3 = (-2, -2)^T \\ f(x_r) = 2 \end{cases}$

$f(x_r) \geq f(X_3) \Rightarrow x_r$ é muito fraco $\Rightarrow$ calcular x_c (contraído para o interior)

$\begin{cases} x_c = 0.5X_3 + (1 - 0.5)\bar{x} = (0.25, 0.25)^T \\ f(x_c) = 0.25 \end{cases} \qquad f(x_c) < f(X_2) \Rightarrow x_c$ é bom $\Rightarrow$ aceitar x_c

Novo simplex (já ordenado)

$$S_2 = \left\langle \underset{0}{\overset{X_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \underset{0.25}{\overset{X_2}{\begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}}}, \underset{1}{\overset{X_3}{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}} \right\rangle$$

Testar critério de paragem

$\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = \max(1, 0) = 1$

$\frac{1}{\Delta}\max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{1}{1}\max(0.3536, 1.4142) = 1.4142 \leq 0.5$ Falso, nova iteração

2^a iteração

$\bar{x} = \frac{(X_1+X_2)}{2} = (0.125, 0.125)^T \qquad \begin{cases} x_r = 2\bar{x} - X_3 = (1.25, 1.25)^T \\ f(x_r) = 1.25 \end{cases}$

$f(x_r) \geq f(X_3) \Rightarrow x_r$ é muito fraco $\Rightarrow$ calcular x_c (contraído para o interior)

$\begin{cases} x_c = 0.5X_3 + (1 - 0.5)\bar{x} = (-0.4375, -0.4375)^T \\ f(x_c) = 0.4375 \end{cases}$

$f(x_c) \geq f(X_2) \Rightarrow x_c$ é bom $\Rightarrow$ encolher simplex

$x_2 = \frac{(X_1+X_2)}{2} = (0.125, 0.125)^T$ e $f(x_2) = 0.125$

$x_3 = \frac{(X_1+X_3)}{2} = (-0.5, -0.5)^T$ e $f(x_3) = 0.5$

Novo simplex (já ordenado)

$$S_3 = \left\langle \underset{0}{\overset{X_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \underset{0.125}{\overset{X_2}{\begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.125 \end{pmatrix}}}, \underset{0.5}{\overset{X_3}{\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}}} \right\rangle$$

Testar critério de paragem:

$\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = \max(1, 0) = 1$

$\frac{1}{\Delta}\max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{1}{1}\max(0.17680.7071) = 0.7071 \leq 0.75$ Verdadeiro

$$\text{Solução: } \begin{cases} x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ f(x^*) = 0 \end{cases}$$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolx',0.5);
x0=[-1;-1];
fun = @(x)sqrt(abs(x(1)*x(2)));
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminsearch(fun,x0,op)
```

Otimização diferenciável - Métodos do gradiente

16. Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + (2 - x_1)^2$$

calcule o seu mínimo usando o algoritmo de segurança de Newton.
O processo iterativo deve ser iniciado com o ponto $(1, 1)$ e deve terminar quando o critério de paragem for verificado para $\varepsilon = 0.1$. Considere $\eta = 0.0001$. Deve, também, implementar o algoritmo baseado no critério de Armijo para calcular o comprimento do passo α, em cada iteração e considere $\mu = 0.001$.

Resolução

Determinação do vetor gradiente e matriz Hessiana da função:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 - 2(2 - x_1) \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

1^a iteração

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direção $d_N^{(1)}$

$$\nabla^2 f\left(x^{(1)}\right) d_N^{(1)} = -\nabla f\left(x^{(1)}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} d_N^{(1)} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \text{-}2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \text{-}3 \end{array}\right) \Rightarrow \nabla^2 f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ é singular} \Rightarrow \nexists d_N^{(1)}$$

$$\text{então } d_{SN}^{(1)} = \; = -\nabla f\left(x^{(1)}\right) = -\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow d_{SN} \text{ é descendente} \Rightarrow \boxed{d_{SN}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Cálculo do comprimento do passo $\alpha^{(1)}$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Para $\alpha = 1 \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

  $$f(\bar{x}) \equiv \underbrace{f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=2} \leq \underbrace{f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=2} + \underbrace{\mu}_{=0.001} \underbrace{\alpha}_{=1} \underbrace{\nabla f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T d_{SN}^{(1)}}_{\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -5 < 0}$$

  Condição de Armijo: $2 \leq 2 + 0.001\,(1)\,(-5)$ (Falso) $\Rightarrow \alpha = \alpha/2$

- Para $\alpha = 0.5 \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\bar{x}) = 0.25$

  Condição de Armijo: $0.25 \leq 2 + 0.001\,(0.5)\,(-5)$ (Verdadeiro)

$\boxed{\alpha^{(1)} = 0.5}$

Cálculo do novo ponto

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha^{(1)} d_{SN}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad f\left(x^{(2)}\right) = 0.25$$

Testar critério de paragem

$\nabla f\left(x^{(2)}\right)=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f\left(x^{(2)}\right)\right\|_2=\left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_2=1\leq 0.1$ (Falso) $\Rightarrow$ nova iteração

2^a iteração

$\nabla^2 f\left(x^{(2)}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Cálculo da direção $d_N^{(2)}$

$\nabla^2 f\left(x^{(2)}\right)d_N^{(2)}=-\nabla f\left(x^{(2)}\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}d_N^{(2)}=-\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow\nabla^2 f\left(x^{(2)}\right)$ é não singular $\Rightarrow d_N^{(2)}=\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Verificar tipo de direção:

Se $\underbrace{\left|\nabla f\left(x^{(2)}\right)^T d_N^{(2)}\right|}_{=0.5}\leq\eta\Leftrightarrow 0.5\leq 0.0001$ (F) - direção não é ortogonal ao gradiente

Se $\underbrace{\nabla f\left(x^{(2)}\right)^T d_N^{(2)}}_{=-0.5}>\eta\Leftrightarrow -0.5>0.0001$ (F) - direção não é de subida

$d_N^{(2)}$ é descendente $\Rightarrow\boxed{d_{SN}^{(2)}=\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Cálculo do comprimento do passo $\alpha^{(2)}$

$\bar{x}=\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Para $\alpha=1\Rightarrow\bar{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $f(\bar{x})\equiv\underbrace{f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0}\leq\underbrace{f\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0.25}+\underbrace{\mu}_{=0.001}\underbrace{\alpha}_{=1}\underbrace{\nabla f\left(x^{(2)}\right)^T d^{(2)}}_{-0.5}$

  Condição de Armijo: $0\leq 0.25+0.001\,(1)\,(-0.5)$ (Verdadeiro)

$\boxed{\alpha^{(2)}=1}$

Cálculo do novo ponto

$x^{(3)}=x^{(2)}+\alpha^{(2)}d_{SN}^{(2)}=\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}+1\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}\qquad\boxed{x^{(3)}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}\qquad f\left(x^{(3)}\right)=0$

Testar critério de paragem

$\nabla f\left(x^{(3)}\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left\|\nabla f\left(x^{(3)}\right)\right\|_2=\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_2=0\leq 0.1$ (V)

Solução: $\begin{cases} x^*=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(x^*)=0 \end{cases}$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolfun',0.1);
x0=[1;1];
fun = @(x)x(1)*x(2)^2+(2-x(1))^2;
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminunc(fun,x0,op)
```

17. Considere a função

$$f(x_1, x_2) = -\sin(x_1 - 1) - x_2^4$$

Implemente, no máximo, duas iterações do método de segurança de Newton para determinar o máximo da função $f(x_1, x_2)$. Considere $\eta = 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$, $\varepsilon = 1$ e $x^{(1)} = (1, 1)^T$.

Resolução

Determinação do vetor gradiente e matriz Hessiana da função:

$$\max f(x) = -\min(-f(x)) \qquad \min f(x_1, x_2) = \sin(x_1 - 1) + x_2^4$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_1 - 1) \\ 4x_2^3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1 - 1) & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$$

1^a iteração

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direção $d_N^{(1)}$

$$\nabla^2 f\left(x^{(1)}\right) d_N^{(1)} = -\nabla f\left(x^{(1)}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} d_N^{(1)} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{Sistema Impossível}$$

Então $d_{SN}^{(1)} = \ = -\nabla f\left(x^{(1)}\right) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow d_{SN}$ é descendente $\Rightarrow \boxed{d_{SN}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}}$

Cálculo do comprimento do passo $\alpha^{(1)}$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- Para $\alpha = 1 \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

  $$f(\bar{x}) \equiv \underbrace{f\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}}_{=80.15856} \leq \underbrace{f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=1} + \underbrace{\mu}_{=1\times 10^{-6}} \underbrace{\alpha}_{=1} \underbrace{\nabla f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T d_{SN}^{(1)}}_{\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = -17 < 0}$$

  Condição de Armijo: $= 80.15856 \leq 1 + 1 \times 10^{-6}\ (1)\ (-17)$ (Falso) $\Rightarrow \alpha = \alpha/2$

- Para $\alpha = 0.5 \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(\bar{x}) = 0.52057$

  Condição de Armijo: $0.52057 \leq 1 + 1 \times 10^{-6}\ (0.5)\ (-17)$ (Verdadeiro)

$\boxed{\alpha^{(1)} = 0.5}$

Cálculo do novo ponto

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha^{(1)} d_{SN}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \boxed{x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad f\left(x^{(2)}\right) = 0.52057$$

Testar critério de paragem

$\nabla f\left(x^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} -0.87758 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f\left(x^{(2)}\right)\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} 0.87758 \\ -4 \end{pmatrix}\right\|_2 = 4.09514 \leq 0.1$ (Falso) $\Rightarrow$ nova iteração

2^a iteração

$\nabla^2 f\left(x^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 0.47943 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

Cálculo da direção $d_N^{(2)}$

$\nabla^2 f\left(x^{(2)}\right) d_N^{(2)} = -\nabla f\left(x^{(2)}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.47943 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} d_N^{(2)} = -\begin{pmatrix} 0.87558 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0.47943 & 0 & \text{-0.87758} \\ 0 & 12 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow d_N^{(2)} = \begin{pmatrix} -1.83049 \\ 0.33333 \end{pmatrix}$

Verificar tipo de direção:

Se $\underbrace{\left|\nabla f\left(x^{(2)}\right)^T d_N^{(2)}\right|}_{=2.93974} \leq \eta \Leftrightarrow 2.93974 \leq 1 \times 10^{-6}$ (F) - direção não é ortogonal ao gradiente

Se $\underbrace{\nabla f\left(x^{(2)}\right)^T d_N^{(2)}}_{=-2.93974} > \eta \Leftrightarrow -2.93974 > 1 \times 10^{-6}$ (F) - direção não é de subida

$d_N^{(2)}$ é descendente $\Rightarrow \boxed{d_{SN}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1.83049 \\ 0.33333 \end{pmatrix}}$

Cálculo do comprimento do passo $\alpha^{(2)}$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1.83049 \\ 0.33333 \end{pmatrix}$

- Para $\alpha = 1 \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} -1.33049 \\ -0.66667 \end{pmatrix}$

  $f(\bar{x}) \equiv \underbrace{f\begin{pmatrix} -1.33049 \\ -0.66667 \end{pmatrix}}_{=-0.52752} \leq \underbrace{f\begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=0.52057} + \underbrace{\mu}_{=1\times10^{-6}} \underbrace{\alpha}_{=1} \underbrace{\nabla f\left(x^{(2)}\right)^T d^{(2)}}_{-2.93974}$

  Condição de Armijo: $-0.52752 \leq 0.52057 + 1 \times 10^{-6}\ (1)\ (-2.93974)$ (Verdadeiro)

$\boxed{\alpha^{(2)} = 1}$

Cálculo do novo ponto

$x^{(3)} = x^{(2)} + \alpha^{(2)} d_{SN}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1.83049 \\ 0.33333 \end{pmatrix}$

$\boxed{x^{(3)} = \begin{pmatrix} -1.33049 \\ -0.66667 \end{pmatrix}} \qquad f\left(x^{(3)}\right) = -0.52752$

Testar critério de paragem

$\nabla f\left(x^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} -0.68870 \\ -1.18519 \end{pmatrix}$

$\left\|\nabla f\left(x^{(3)}\right)\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} -0.68870 \\ -1.18519 \end{pmatrix}\right\|_2 = 1.67611 \leq 0.1$ (V)

Como o número máximo de iterações é dois, para aqui o método.

$$\text{Solução: } \begin{cases} x^* = \begin{pmatrix} -1.33049 \\ -0.66667 \end{pmatrix} \\ f(x^*) = 0.52752 \end{cases}$$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolfun',1);
x0=[1;1];
fun = @(x)sin(x(1)-1)+x(2)^4;
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminunc(fun,x0,op)
```

18. A soma de três números (x_1, x_2 e x_3) positivos é igual a 40. Determine esses números de modo que a soma dos seus quadrados seja mínima.

    Use a relação da soma para colocar x_3 em função das outras 2 variáveis.

    (a) Formule o problema como um problema de otimização sem restrições.

    (b) A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (10, 10)$, use o método de Segurança de Newton (com $\eta = 0.00001$) para calcular esses números, considerando no critério de paragem $\varepsilon = 0.001$ (duas iterações). Na condição de Armijo tome $\mu = 0.001$.

Resolução

(a) Formular o problema $\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 = 40 \end{array}$

A partir da restrição, e fazendo $x_3 = 40 - x_1 - x_2$ então o problema sem restrições é dado por:

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + (40 - x_1 - x_2)^2$$

(b) Determinação do vetor gradiente e matriz Hessiana da função:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2(40 - x_1 - x_2) \\ 2x_2 - 2(40 - x_1 - x_2) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1^a iteração

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \nabla f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direção $d_N^{(1)}$

$$\nabla^2 f\left(x^{(1)}\right) d_N^{(1)} = -\nabla f\left(x^{(1)}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} d_N^{(1)} = -\begin{pmatrix} -20 \\ -20 \end{pmatrix} \Rightarrow d_N^{(1)} = \begin{pmatrix} 3.33333 \\ 3.33333 \end{pmatrix}$$

Verificar tipo de direção:

Se $\underbrace{\left|\nabla f\left(x^{(1)}\right)^T d_N^{(1)}\right|}_{=133.33332} \leq \eta \Leftrightarrow 133.33332 \leq 0.00001$ (F) - direção não é ortogonal ao gradiente

Se $\underbrace{\nabla f\left(x^{(1)}\right)^T d_N^{(1)}}_{=-133.33332} > \eta \Leftrightarrow -133.33332 > 0.00001$ (F) - direção não é de subida

$d_N^{(2)}$ é descendente $\Rightarrow \boxed{d_{SN}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3.33333 \\ 3.33333 \end{pmatrix}}$

Cálculo do comprimento do passo $\alpha^{(1)}$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3.33333 \\ 3.33333 \end{pmatrix}$$

Para $\alpha = 1 \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 13.33333 \\ 13.33333 \end{pmatrix}$

Condição de Armijo: $533.333333 \leq 600 + 0.001 \times (1)\ (-133.33332)$ (Verdadeiro)

$\boxed{\alpha^{(1)} = 1}$

Novo ponto $\boxed{x^{(2)} = \begin{pmatrix} 13.33333 \\ 13.33333 \end{pmatrix}}$ $\quad f\left(x^{(2)}\right) = 533.333333$

Testar critério de paragem

$$\nabla f\left(x^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} -0.000002 \\ -0.000002 \end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f\left(x^{(2)}\right)\right\|_2 = 0.000003 \leq 0.001 \text{ (Verdadeiro)}$$

Solução: $x^* = \begin{pmatrix} 13.33333 \\ 13.33333 \end{pmatrix}$ $\quad f\left(x^*\right) = 533.333333$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolfun',0.001);
x0=[10;10];
fun = @(x)x(1)^2+x(2)^2+(40-x(1)-x(2))^2;
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminunc(fun,x0,op)
```

19. Uma empresa fabrica e comercializa dois tipos de computadores portáteis. O custo de fabrico de cada um deles decresce à medida que o número de unidades produzidas aumenta e é dado pelas seguintes relações empíricas:

$$c_1 = 5 + \frac{1500}{x_1} \qquad c_2 = 7 + \frac{2500}{x_2},$$

em que x_1 e x_2 são o número de unidades de cada um dos portáteis produzidos. O preço de venda dos computadores é tanto menor quanto maior for o número de unidades produzidas, de acordo com as seguintes relações:

$$p_1 = 15 - 0.001x_1 \qquad p_2 = 25 - 0.0015x_2$$

(a) Formule o problema de otimização que consiste em determinar quantas unidades de cada computador a firma deve produzir de modo a maximizar os lucros.

(b) Resolva o problema usando o método de Segurança de Newton (com $\eta = 0.00001$). Considere a seguinte aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (20, 30)$ e $\varepsilon = 0.001$. No critério de Armijo tome $\mu = 0.001$.

(c) Com base na aproximação calculada na alínea anterior ao número de computadores produzidos, a empresa terá lucro?

Resolução

(a) Formular o problema para maximizar o lucro $\equiv x_1p_1 + x_2p_2 - x_1c_1 - x_2c_2$

$$\max \quad x_1(15 - 0.001x_1) + x_2(25 - 0.0015x_2) - x_1(5 + \frac{1500}{x_1}) - x_2(7 + \frac{2500}{x_2})$$

(b) Problema a resolver

$\min f(x_1, x_2) = -(10x_1 - 0.001x_1^2 + 18x_2 - 0.0015x_2^2 - 4000)$

Determinação do vetor gradiente e matriz Hessiana da função:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 0.002x_1 - 10 \\ 0.003x_2 - 18 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0.002 & 0 \\ 0 & 0.003 \end{pmatrix}$$

1^a iteração

$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad \nabla f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -9.96 \\ -17.91 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0.002 & 0 \\ 0 & 0.003 \end{pmatrix}$

Cálculo da direção $d_N^{(1)}$

$\nabla^2 f\left(x^{(1)}\right) d_N^{(1)} = -\nabla f\left(x^{(1)}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.002 & 0 \\ 0 & 0.003 \end{pmatrix} d_N^{(1)} = -\begin{pmatrix} -9.96 \\ -17.91 \end{pmatrix} \Rightarrow d_N^{(1)} = \begin{pmatrix} 4980 \\ 5970 \end{pmatrix}$

Verificar tipo de direção:

Se $\left|\nabla f\left(x^{(1)}\right)^T d_N^{(1)}\right| \leq \eta \Leftrightarrow 156520 \leq 0.00001$ (F) - direção não é ortogonal ao gradiente

Se $\nabla f\left(x^{(1)}\right)^T d_N^{(1)} > \eta \Leftrightarrow -156520 > 0.00001$ (F) - direção não é de subida

$d_N^{(2)}$ é descendente $\Rightarrow \boxed{d_{SN}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4980 \\ 5970 \end{pmatrix}}$

Cálculo do comprimento do passo $\alpha^{(1)}$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4980 \\ 5970 \end{pmatrix}$

Para $\alpha = 1 \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 6000 \end{pmatrix}$

Condição de Armijo: $-75000 \leq 3261.8 + 0.001 \times 1\ (-156520)$ (Verdadeiro)

$\boxed{\alpha^{(1)} = 1}$

Novo ponto $\boxed{x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 6000 \end{pmatrix}} \qquad f\left(x^{(2)}\right) = -75000$

Testar critério de paragem

$\nabla f\left(x^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f\left(x^{(2)}\right)\right\|_2 = 0 \leq 0.001$ (Verdadeiro)

Solução: $x^* = \begin{pmatrix} 5000 \\ 6000 \end{pmatrix} \quad f(x^*) = -75000$

(c) Sim, o lucro é de 75000.

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolfun',0.001);
x0=[20;30];
fun = @(x)-(10*x(1)-0.001*x(1)^2+18*x(2)-0.0015*x(2)^2-4000);
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminunc(fun,x0,op)
```

20. Três estações elétricas vão fornecer energia, a uma certa região, da forma mais económica possível. Os custos individuais de operação de cada uma das estções são dados por

$$\begin{aligned} f_1 &= 0.1 + 0.25x \\ f_2 &= 0.08 + 0.12y + 0.00125y^2 \\ f_3 &= 0.05 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3 \end{aligned}$$

em que x, y e z são as energias fornecidas pelas três estações (em $MWatt$).

Calcule o custo total mínimo, sabendo que a energia total a ser fornecida é de 100 $MWatt$, recorrendo ao método de Segurança de Newton.

Como valores iniciais use $(x, y)^{(1)} = (30, 50)$, no critério de paragem considere $\varepsilon = 0.5$ e tome $\eta = 0.0001$. Como estratégia de procura unidimensional utilize o critério de Armijo com $\mu = 0.01$.

Nota: use a restrição relacionada com a energia a fornecer, para eliminar uma das variáveis, por exemplo $x = 100 - y - z$.

Resolução

Formular o problema

$$\begin{array}{ll} \min & 0.1 + 0.25x + 0.08 + 0.12y + 0.00125y^2 + 0.05 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3 \\ \text{s.a} & x + y + z = 100 \end{array}$$

Fazendo $x = 100 - y - z$ o problema a resolver é:

$$\begin{aligned} \min f(y,z) &\equiv 0.1 + 0.25(100 - y - z) + 0.08 + 0.12y + 0.00125y^2 + 0.05 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3 \\ &\equiv 25.23 - 0.1y + 0.00125y^2 - 0.16z + 0.001z^2 + 0.0001z^3 \end{aligned}$$

Vetor gradiente e matriz Hessiana da função:

$$\nabla f(y,z) = \begin{pmatrix} -0.13 + 0.0025y \\ -0.16 + 0.002z + 0.0003z^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla^2 f(y,z) = \begin{pmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 0.002 + 0.0006z \end{pmatrix}$$

1^a iteração

$$(y,z)^{(1)} = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} \qquad \nabla f\left((y,z)^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -0.055 \\ 0.69 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f\left((y,z)^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 0.032 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direção $d_N^{(1)}$

$$\nabla^2 f\left((y,z)^{(1)}\right) d_N^{(1)} = -\nabla f\left((y,z)^{(1)}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 0.032 \end{pmatrix} d_N^{(1)} = -\begin{pmatrix} -0.055 \\ 0.69 \end{pmatrix} \Rightarrow d_N^{(1)} = \begin{pmatrix} 22 \\ -21.562 \end{pmatrix}$$

Verificar tipo de direção:

Se $\left|\nabla f\left((y,z)^{(1)}\right)^T d_N^{(1)}\right| \leq \eta \Leftrightarrow 16.088125 \leq 0.0001$ (F) - direção não é ortogonal ao gradiente

Se $\nabla f\left((y,z)^{(1)}\right)^T d_N^{(1)} > \eta \Leftrightarrow -16.088125 > 0.0001$ (F) - direção não é de subida

$d_N^{(2)}$ é descendente $\Rightarrow \boxed{d_{SN}^{(2)} = \begin{pmatrix} 22 \\ -21.5625 \end{pmatrix}}$

Cálculo do comprimento do passo $\alpha^{(1)}$

$$(\bar{y,z}) = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 22 \\ -21.5625 \end{pmatrix}$$

Para $\alpha = 1 \Rightarrow (\bar{y,z}) = \begin{pmatrix} 52 \\ 28.4375 \end{pmatrix}$

Condição de Armijo: $20.40841 \leq 29.455 + 0.01 \times 1\ (-16.088125)$ (Verdadeiro)

$\boxed{\alpha^{(1)} = 1}$

Novo ponto $\boxed{(y,z)^{(2)} = \begin{pmatrix} 52 \\ 28.4375 \end{pmatrix}}$ $\qquad f\left(x^{(2)}\right) = 20.40841$

Testar critério de paragem

$\nabla f\left((y,z)^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.13948 \end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f\left((y,z)^{(2)}\right)\right\|_2 = 0.13948 \leq 0.5$ (Verdadeiro)

Solução: $(y,z)^* = \begin{pmatrix} 52 \\ 28.4375 \end{pmatrix} \quad f\left((y,z)^*\right) = 20.40841$

O custo total mínimo é de 20.40841, cuja energia fornecida por cada estação é: $x = 19.5625$, $y = 52$ e $z = 28.4375$.

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolfun',0.5);
x0=[30;50];
fun = @(x)@(x)25.23-0.1*x(1)+0.00125*x(1)^2-0.16*x(2)+0.001*x(2)^2+0.0001*x(2)^3;
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminunc(fun,x0,op)
```

21. Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$$

calcule o seu mínimo usando o algoritmo quasi-Newton (fórmula de atualização DFP). O processo iterativo deve ser iniciado com o ponto $(1, 0)$ e deve terminar quando o critério de paragem for verificado para $\varepsilon = 0.02$. Para calcular o comprimento do passo α, use, em cada iteração o critério de Armijo com $\mu = 0.001$.

Resolução

Determinação do vetor gradiente da função:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

1^a iteração

$\nabla f\left(x^{(1)}\right) = \nabla f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Cálculo da direção $d_{QN}^{(1)}$

$d_{QN}^{(1)} = -H^{(1)} \nabla f\left(x^{(1)}\right) \Leftrightarrow d_{QN}^{(1)} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{d_{QN}^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ e é descendente $\left(\nabla f\left(x^{(k)}\right)^T d_{QN}^{(1)} \leq 0\right)$

Cálculo do comprimento do passo $\alpha^{(1)}$

$\bar{x} = x^{(1)} + \alpha d_{QN}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Para $\alpha = 1 \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $f(\bar{x}) \leq f\left(x^{(1)}\right) + \mu\alpha\nabla f\left(x^{(1)}\right)^T d_{QN}^{(1)}$

  $\underbrace{f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{3} \leq \underbrace{f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=1} + \underbrace{\mu}_{=0.001}\underbrace{\alpha}_{=1}\underbrace{\nabla f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=-5}$

  Condição de Armijo: $3 \leq 1 + 0.001\ (1)\ (-5)$ (Falso) $\Rightarrow \alpha = \alpha/2$

- Para $\alpha = 0.5 \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ $\quad f(\bar{x}) = 0.25$

  Condição de Armijo: $0.25 \leq 1 + 0.001\ (0.5)\ (-5)$ (Verdadeiro)

$\boxed{\alpha^{(1)} = 0.5}$

Cálculo do novo ponto

$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha^{(1)} d_{QN}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}}$ $\qquad f\left(x^{(2)}\right) = 0.25$

Testar critério de paragem

$\nabla f\left(x^{(2)}\right) \equiv \nabla f\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left\|\nabla f\left(x^{(2)}\right)\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|_2 = 1.118 \leq 0.02$ (Falso) $\Rightarrow$ nova iteração

2^a iteração

Cálculo da direção $d_{QN}^{(2)}$

Calcular a matriz $H^{(2)}$ pela fórmula de atualização DFP

$$H^{(2)} = H^{(1)} - \frac{H^{(1)}y^{(1)}{y^{(1)}}^T H^{(1)}}{{y^{(1)}}^T H^{(1)} y^{(1)}} + \frac{s^{(1)}{s^{(1)}}^T}{{s^{(1)}}^T y^{(1)}}$$

$$s^{(1)} = x^{(2)} - x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$y^{(1)} = \nabla f\left(x^{(2)}\right) - \nabla f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo dos escalares dos denominadores

$${s^{(1)}}^T y^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2.5 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.5 + 1 = 3.5$$

$${y^{(1)}}^T H^{(1)} y^{(1)} = \begin{pmatrix} -2.5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2.5 \\ 2 \end{pmatrix} = 6.25 + 4 = 10.25$$

Cálculo das matrizes dos numeradores

$$s^{(1)}{s^{(1)}}^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$H^{(1)}y^{(1)}y^{(1)^T}H^{(1)} = I\begin{pmatrix} -2.5 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2.5 & 2 \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 6.25 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} H^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 6.25 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}}{10.25} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0.25 \end{pmatrix}}{3.5} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.6098 & -0.4878 \\ -0.4878 & 0.3902 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2857 & -0.1429 \\ -0.1429 & 0.0714 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.6759 & 0.3449 \\ 0.3449 & 0.6812 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cálculo da direção $d_{QN}^{(2)}$

$$d_{QN}^{(2)} = -H^{(2)}\nabla f\left(x^{(2)}\right) = -\begin{pmatrix} 0.6759 & 0.3449 \\ 0.3449 & 0.6812 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0070 \\ -0.5088 \end{pmatrix}$$

Verificar se a direção é descendente

$$\nabla f\left(x^{(2)}\right)^T d_{QN}^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.0070 \\ -0.5088 \end{pmatrix} = -0.5053 < 0$$

$\Rightarrow d_{QN}^{(2)}$ é descendente

$$\boxed{d_{QN}^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.0070 \\ -0.5088 \end{pmatrix}}$$

Cálculo do comprimento do passo $\alpha^{(2)}$

$$\bar{x} = x^{(2)} + \alpha d_{QN}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} -0.0070 \\ -0.5088 \end{pmatrix}$$

- Para $\alpha = 1 \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} -0.0070 \\ -0.0088 \end{pmatrix}$

  $$f(\bar{x}) \leq f\left(x^{(2)}\right) + \mu\alpha\nabla f\left(x^{(2)}\right)^T d_{QN}^{(2)}$$

  $$\underbrace{f\begin{pmatrix} -0.0070 \\ -0.0088 \end{pmatrix}}_{=0.00006484} \leq \underbrace{f\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}}_{=0.25} + \underbrace{\mu}_{=0.001}\underbrace{\alpha}_{=1}\underbrace{\nabla f\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} -0.0070 \\ -0.5088 \end{pmatrix}}_{=-0.5053}$$

  Condição de Armijo: $0.00006484 \leq 0.25 + 0.001\ (1)\ (-0.5053)$ (Verdadeiro)

$$\boxed{\alpha^{(2)} = 1}$$

Cálculo do novo ponto

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \alpha^{(2)}d_{QN}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -0.0070 \\ -0.5088 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.0070 \\ -0.0088 \end{pmatrix}} \qquad f\left(x^{(3)}\right) = 0.00006484$$

Testar critério de paragem

$$\nabla f\left(x^{(3)}\right) \equiv \nabla f\begin{pmatrix} -0.0070 \\ -0.0088 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0052 \\ -0.0106 \end{pmatrix}$$

$$\left\|\nabla f\left(x^{(3)}\right)\right\|_2 = 0.0118 \leq 0.02 \text{ (Verdadeiro)}$$

Solução:
$x^* \approx \begin{pmatrix} -0.0070 \\ -0.0088 \end{pmatrix} \quad f^* \approx 0.00006484$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolfun',0.02,'HessUpdate','DFP');
x0=[1;0];
fun = @(x)x(1)^2+x(2)^2-x(1)*x(2);
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminunc(fun,x0,op)
```

22. Numa situação monopolista, o rendimento de uma empresa face à venda de um produto ou serviço depende do nível de produção z. O rendimento é uma função crescente de z mas tende em direcção a uma assímptota assim que o mercado fica saturado.

Considere a seguinte função rendimento

$$R(z) = z^2/(1+z^2)$$

que depende da produção z dada por $z = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, em que x_1 representa o capital e x_2 o trabalho. Supondo que a função lucro é dada por

$$\pi(x_1, x_2) = R(z) - 0.04x_1 - 0.06x_2$$

calcule o lucro máximo que a empresa pode ter. Use o método quasi-Newton (com fórmula BFGS). Como aproximação inicial use o ponto $(2,1)$. Faça apenas duas iterações. Use na paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.1$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

Resolução

Formular o problema

$$\max \pi(x_1,x_2) = R\left(x_1^{1/2}x_2^{1/2}\right) - 0.04x_1 - 0.06x_2 = \frac{\left(x_1^{1/2}x_2^{1/2}\right)^2}{\left(1+x_1^{1/2}x_2^{1/2}\right)^2} - 0.04x_1 - 0.06x_2$$

$$\max \frac{x_1x_2}{1+x_1x_2} - 0.04x_1 - 0.06x_2$$

(b) Problema a resolver

$\min f(x_1,x_2) = -\left(\dfrac{x_1x_2}{1+x_1x_2} - 0.04x_1 - 0.06x_2\right)$

Determinação do vetor gradiente e matriz Hessiana da função:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 0.04 - \dfrac{x_2}{(1+x_1x_2)^2} \\ \\ 0.06 - \dfrac{x_1}{(1+x_1x_2)^2} \end{pmatrix}$$

1^a iteração

$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla f\left(x^{(1)}\right) = \nabla f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0711 \\ -0.1622 \end{pmatrix}$

Cálculo da direção $d_{QN}^{(1)}$

$d_{QN}^{(1)} = -H^{(1)}\nabla f\left(x^{(1)}\right) \Leftrightarrow d_{QN}^{(1)} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.0711 \\ -0.1622 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0711 \\ 0.1622 \end{pmatrix}$

$$\nabla f\left(x^{(k)}\right)^T d_{QN}^{(1)} = (-0.0711, -0.1622)\begin{pmatrix} 0.0711 \\ 0.1622 \end{pmatrix} = -0.03114 \leq 0 \ \text{ é descendente}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_{QN}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0711 \\ 0.1622 \end{pmatrix}}$$

Cálculo do comprimento do passo $\alpha^{(1)}$

$$\bar{x} = x^{(1)} + \alpha d_{QN}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0.0711 \\ 0.1622 \end{pmatrix}$$

- Para $\alpha = 1 \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 2.0711 \\ 1.1622 \end{pmatrix}$

  $f(\bar{x}) \leq f\left(x^{(1)}\right) + \mu\alpha\nabla f\left(x^{(1)}\right)^T d_{QN}^{(1)}$

  $$\underbrace{f\begin{pmatrix} 2.0711 \\ 1.1622 \end{pmatrix}}_{-0.5539} \leq \underbrace{f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=-0.5267} + \underbrace{\mu}_{=0.001}\underbrace{\alpha}_{=1}\underbrace{\nabla f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.0711 \\ 0.1622 \end{pmatrix}}_{=-0.03114}$$

  Condição de Armijo: $-0.5539 \leq -0.5267 + 0.001\ (1)\ (-0.03114)$ (Verdadeiro)

$\boxed{\alpha^{(1)} = 1}$

Cálculo do novo ponto

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha^{(1)} d_{QN}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0.0711 \\ 0.1622 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.0711 \\ 1.1622 \end{pmatrix}} \qquad f\left(x^{(2)}\right) = -0.5539$$

Testar critério de paragem

$$\nabla f\left(x^{(2)}\right) \equiv \nabla f\begin{pmatrix} 2.0711 \\ 1.1622 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0601 \\ -0.1184 \end{pmatrix}$$

$$\left\|\nabla f\left(x^{(2)}\right)\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} -0.0601 \\ -0.1184 \end{pmatrix}\right\|_2 = 0.1328 \leq 0.1 \text{ (Falso)} \Rightarrow \text{nova iteração}$$

$\boxed{\mathbf{2}^a \textbf{ iteração}}$

Cálculo da direção $d_{QN}^{(2)}$

Calcular a matriz $H^{(2)}$ pela fórmula de atualização BFGS

$$H^{(2)} = \left(I - \frac{s^{(1)}y^{(1)^T}}{s^{(1)^T}y^{(1)}}\right) H^{(1)} \left(I - \frac{y^{(1)}s^{(1)^T}}{s^{(1)^T}y^{(1)}}\right) + \frac{s^{(1)}s^{(1)^T}}{s^{(1)^T}y^{(1)}}$$

$$s^{(1)} = x^{(2)} - x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2.0711 \\ 1.1622 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0711 \\ 0.1622 \end{pmatrix}$$

$$y^{(1)} = \nabla f\left(x^{(2)}\right) - \nabla f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -0.0601 \\ -0.1184 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.0711 \\ -0.1622 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0110 \\ 0.0438 \end{pmatrix}$$

Cálculo dos escalares dos denominadores

$$s^{(1)^T} y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0711 & 0.1622 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0110 \\ 0.0438 \end{pmatrix} = 0.0079$$

Cálculo das matrizes dos numeradores

$$s^{(1)}y^{(1)^T} = \begin{pmatrix} 0.0711 \\ 0.1622 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0110 & 0.0438 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0008 & 0.0031 \\ 0.0018 & 0.0071 \end{pmatrix}$$

$$s^{(1)}s^{(1)^T} = \begin{pmatrix} 0.0711 \\ 0.1622 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0711 & 0.1622 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0051 & 0.0115 \\ 0.0115 & 0.0263 \end{pmatrix}$$

$$y^{(1)}s^{(1)^T} = \begin{pmatrix} 0.0110 \\ 0.0438 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0711 & 0.1622 \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 0.0008 & 0.0018 \\ 0.0031 & 0.0071 \end{pmatrix}$$

$$H^{(2)} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0.0008 & 0.0031 \\ 0.0018 & 0.0071 \end{pmatrix}}{0.0079} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0.0008 & 0.0018 \\ 0.0031 & 0.0071 \end{pmatrix}}{0.0079} \right) + \frac{\begin{pmatrix} 0.0051 & 0.0115 \\ 0.0115 & 0.0263 \end{pmatrix}}{0.0079} = \begin{pmatrix} 1.6072 & 1.2112 \\ 1.2112 & 3.3913 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direção $d_{QN}^{(2)}$

$$d_{QN}^{(2)} = -H^{(2)}\nabla f\left(x^{(2)}\right) = -\begin{pmatrix} 1.6072 & 1.2112 \\ 1.2112 & 3.3913 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0601 \\ -0.1184 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2400 \\ 0.4743 \end{pmatrix}$$

Verificar se a direção é descendente

$$\nabla f\left(x^{(2)}\right)^T d_{QN}^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.0601 & -0.1184 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2400 \\ 0.4743 \end{pmatrix} = -0.0706 < 0 \Rightarrow d_{QN}^{(2)} \text{ é descendente}$$

$$\boxed{d_{QN}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.2400 \\ 0.4743 \end{pmatrix}}$$

Cálculo do comprimento do passo $\alpha^{(2)}$

$$\bar{x} = x^{(2)} + \alpha d_{QN}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.0711 \\ 1.1622 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0.2400 \\ 0.4743 \end{pmatrix}$$

- Para $\alpha = 1 \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 2.3111 \\ 1.6365 \end{pmatrix}$

  $f(\bar{x}) \leq f\left(x^{(2)}\right) + \mu\alpha\nabla f\left(x^{(2)}\right)^T d_{QN}^{(2)}$

  Condição de Armijo: $-0.6003 \leq -0.5539 + 0.001\ (1)\ (-0.0706)$ (Verdadeiro)

$$\boxed{\alpha^{(2)} = 1}$$

Cálculo do novo ponto

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \alpha^{(2)} d_{QN}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.3111 \\ 1.6365 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x^{(3)} = \begin{pmatrix} 2.3111 \\ 1.6365 \end{pmatrix}} \qquad f\left(x^{(3)}\right) = -0.6003$$

Testar critério de paragem

$$\nabla f\left(x^{(3)}\right) \equiv \nabla f \begin{pmatrix} 2.3111 \\ 1.6365 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0316 \\ -0.0411 \end{pmatrix}$$

$$\left\|\nabla f\left(x^{(3)}\right)\right\|_2 = 0.0518 \leq 0.1 \text{ (Verdadeiro)}$$

Solução:

$x^* \approx \begin{pmatrix} 2.3111 \\ 1.6365 \end{pmatrix} \quad \pi^* \approx 0.6003$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolfun',0.1,'HessUpdate','bfgs');
x0=[2;1];
fun = @(x)-((x(1)*x(2))/(1+x(1)*x(2))-0.04*x(1)-0.06*x(2));
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminunc(fun,x0,op)
```

23. Suponha que pretendia representar um número A positivo na forma de um produto de quatro factores positivos x_1, x_2, x_3 e x_4. Para $A = 2401$, determine esses factores de tal forma que a sua soma seja a menor possível.

   (a) Formule o problema como um problema de otimização sem restrições.

   (b) A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2, x_3)^{(1)} = (6, 7, 5)$, use o método quasi-Newton baseado para calcular esses factores (com fórmula DFP). Considere para paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.15$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

Resolução

a) Formulação do problema sem restrições:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.a} & x_1 x_2 x_3 x_4 = 2401 \end{array}$$

Utilizar a restrição para tornar o problema sem restrições. Fazendo $x_4 = \dfrac{2401}{x_1 x_2 x_3}$ então

$$\max f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 + \frac{2401}{x_1 x_2 x_3}$$

b) Vetor gradiente da função:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2401}{x_1^2 x_2 x_3} \\ 1 - \frac{2401}{x_1 x_2^2 x_3} \\ 1 - \frac{2401}{x_1 x_2 x_3^2} \end{pmatrix}$$

Solução no final da 1ª iteração **Solução no final da 2ª iteração**

$$\begin{cases} x^{(2)} = \begin{pmatrix} 6.9056 \\ 7.6333 \\ 6.2867 \end{pmatrix} \\ f^{(2)} = 28.0709 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{(3)} = \begin{pmatrix} 6.9635 \\ 7.5824 \\ 6.4576 \end{pmatrix} \\ f^{(3)} = 28.0453 \end{cases}$$

Solução final:

$x_1 \approx 6.9635 \quad x_2 \approx 7.5824 \quad x_3 \approx 6.4576 \quad x_4 = \dfrac{2402}{x_1 x_2 x_3} = 7.0418$ e soma $= 28.0453$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolfun',0.15,'HessUpdate','dfp');
x0=[6;7;5];
fun = @(x)x(1)+x(2)+x(3)+2401/(x(1)*x(2)*x(3));
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminunc(fun,x0,op)
```

24. O lucro, em milhares de euros, da colocação de um sistema elétrico é dado por

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = 20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$$

em que x_1 e x_2 designam, respetivamente, o custo da mão de obra e do material. Calcule o lucro máximo usando o método quasi-Newton (com a fórmula DFP), considerando na paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.0001$. Tome a seguinte aproximação inicial $(0, 0)$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

Resolução

$$\max \mathcal{L}(x_1, x_2) = \min(-\mathcal{L}(x_1, x_2))$$

Problema a resolver pelo método quasi-Newton (com a fórmula DFP)

$$\min -(20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2)$$

Vetor gradiente da função:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -20 - 4x_2 + 8x_1 \\ -26 - 4x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$$

Solução:

1ª iteração	**2ª iteração**	**3ª iteração**	**4ª iteração**
$\begin{cases} x^{(2)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} \\ f^{(2)} = -151 \end{cases}$	$\begin{cases} x^{(3)} = \begin{pmatrix} 7.4968 \\ 8.6344 \end{pmatrix} \\ f^{(3)} = -184.8852 \end{cases}$	$\begin{cases} x^{(4)} = \begin{pmatrix} 6.4572 \\ 8.8709 \end{pmatrix} \\ f^{(4)} = -186.0517 \end{cases}$	$\begin{cases} x^{(5)} = \begin{pmatrix} 7.0001 \\ 9.0002 \end{pmatrix} \\ f^{(5)} = -187 \end{cases}$

O lucro máixmo é de 187, com um custo de mão de obra de 7.0001 e de material de 9.0002.

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolfun',0.0001,'HessUpdate','dfp');
x0=[10;13];
fun = @(x)-(20*x(1)+26*x(2)+4*x(1)*x(2)-4*x(1)^2-3*x(2)^2);
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminunc(fun,x0,op)
```

25. Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^3$$

calcule o seu mínimo usando o método quasi-Newton (com fórmula de atualização BFGS). O processo iterativo deve ser iniciado com o ponto $(2, 1.1)$ e deve terminar quando $\varepsilon = 0.02$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

Resolução

Vetor gradiente da função:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 3(x_2 - 1)^2 \end{pmatrix}$$

1^a iteração

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.1 \end{pmatrix} \qquad \nabla f\left(x^{(1)}\right) = \nabla f \begin{pmatrix} 2 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0000 \\ 0.0300 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direção $d_{QN}^{(1)}$

$$d_{QN}^{(1)} = -H^{(1)}\nabla f\left(x^{(1)}\right) \Leftrightarrow d_{QN}^{(1)} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.0000 \\ 0.0300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0000 \\ -0.0300 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f\left(x^{(k)}\right)^T d_{QN}^{(1)} = (2.0000, 0.0300)\begin{pmatrix} -2.0000 \\ -0.0300 \end{pmatrix} = -4.0009 \leq 0 \text{ é descendente}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_{QN}^{(1)} = \begin{pmatrix} -2.0000 \\ -0.0300 \end{pmatrix}}$$

Cálculo do comprimento do passo $\alpha^{(1)}$

$$\bar{x} = x^{(1)} + \alpha d_{QN}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2.0000 \\ -0.0300 \end{pmatrix}$$

- Para $\alpha = 1 \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 1.0700 \end{pmatrix}$

  $f(\bar{x}) \leq f\left(x^{(1)}\right) + \mu\alpha\nabla f\left(x^{(1)}\right)^T d_{QN}^{(1)}$

  Condição de Armijo: $1.0049 \leq 1.0100 + 0.001\ (1)\ (-4.0009)$ (Verdadeiro)

$\boxed{\alpha^{(1)} = 1}$

Cálculo do novo ponto

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha^{(1)} d_{QN}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -2.0000 \\ -0.0300 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 1.0700 \end{pmatrix}} \qquad f\left(x^{(2)}\right) = 1.0049$$

Testar critério de paragem

$$\nabla f\left(x^{(2)}\right) \equiv \nabla f\begin{pmatrix} 0.0000 \\ 1.0700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0000 \\ 0.0147 \end{pmatrix}$$

$$\left\|\nabla f\left(x^{(2)}\right)\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} -2.0000 \\ 0.0147 \end{pmatrix}\right\|_2 = 2.0001 \leq 0.02 \text{ (Falso)} \Rightarrow \text{nova iteração}$$

2^a iteração

Cálculo da direção $d_{QN}^{(2)}$

Calcular a matriz $H^{(2)}$ pela fórmula de atualização BFGS

$$H^{(2)} = \left(I - \frac{s^{(1)}y^{(1)^T}}{s^{(1)^T}y^{(1)}}\right) H^{(1)} \left(I - \frac{y^{(1)}s^{(1)^T}}{s^{(1)^T}y^{(1)}}\right) + \frac{s^{(1)}s^{(1)^T}}{s^{(1)^T}y^{(1)}}$$

$$s^{(1)} = x^{(2)} - x^{(1)} = \begin{pmatrix} -2.0000 \\ -0.0300 \end{pmatrix}$$

$$y^{(1)} = \nabla f\left(x^{(2)}\right) - \nabla f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -4.0000 \\ -0.0153 \end{pmatrix}$$

$$H^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5000 & -0.0075 \\ 0.0037 & 1.0001 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direção $d_{QN}^{(2)}$

$$d_{QN}^{(2)} = -H^{(2)}\nabla f\left(x^{(2)}\right) = -\begin{pmatrix} 0.5000 & -0.0075 \\ 0.0037 & 1.0001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2.0000 \\ 0.0147 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0002 \\ -0.0074 \end{pmatrix}$$

Verificar se a direção é descendente

$$\nabla f\left(x^{(2)}\right)^T d_{QN}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2.0000 & 0.0147 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.0002 \\ -0.0074 \end{pmatrix} = -2.0004 < 0 \Rightarrow d_{QN}^{(2)} \text{ é descendente}$$

$$\boxed{d_{QN}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.0002 \\ -0.0074 \end{pmatrix}}$$

Cálculo do comprimento do passo $\alpha^{(2)}$

$$\bar{x} = x^{(2)} + \alpha d_{QN}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 1.0700 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1.0002 \\ -0.0074 \end{pmatrix}$$

- Para $\alpha = 1 \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 1.0002 \\ 1.0626 \end{pmatrix}$

  $f(\bar{x}) \le f\left(x^{(2)}\right) + \mu\alpha\nabla f\left(x^{(2)}\right)^T d_{QN}^{(2)}$

  Condição de Armijo: $0.0039 \le 1.0049 + 0.001\ (1)\ (-2.0004)$ (Verdadeiro)

$$\boxed{\alpha^{(2)} = 1}$$

Cálculo do novo ponto

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \alpha^{(2)} d_{QN}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.0002 \\ 1.0626 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0002 \\ 1.0626 \end{pmatrix}} \qquad f\left(x^{(3)}\right) = 0.0039$$

Testar critério de paragem

$$\nabla f\left(x^{(3)}\right) \equiv \nabla f \begin{pmatrix} 1.0002 \\ 1.0626 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0003 \\ 0.0118 \end{pmatrix}$$

$\left\|\nabla f\left(x^{(3)}\right)\right\|_2 = 0.0118 \le 0.02$ (Verdadeiro)

Solução:

$$x^* \approx \begin{pmatrix} 1.0002 \\ 1.0626 \end{pmatrix} \qquad \pi^* \approx 0.0039$$

Resolução em Matlab/Octave

```
op=optimset('Tolfun',0.02,'HessUpdate','bfgs');
x0=[2;1.1];
fun = @(x)(x(1)-1)^2+(x(2)-1)^2;
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fminunc(fun,x0,op)
```