Métodos Numéricos e Otimização Não Linear

2^o teste presencial, 1h20m, 5 valores, 20 jan 2021

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho, Escola de Engenharia, Departamento de Produção e Sistemas

Apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e use **4 casas decimais**

1. [**1 valor**] Considere uma função $f(x_1, x_2)$. No cálculo dos seus pontos estacionários obteve-se o seguinte sistema:

$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2\,(x_1^2 - 4) & = 0 \\ 2x_2^2 - 2 & = 0 \end{cases}$$

   (a) Resolva o sistema para cálculo dos pontos estacionários.

   (b) Calcule a matriz Hessiana; classifique **2 pontos estacionários** à sua escolha.

2. [**1.25 valor**] Considere a função $f(t)$ que representa as vendas de um produto ao longo de um dia numa *convenience store* (loja aberta 24h). No hora de lançamento do produto, $t = 1$, houve um número de vendas significativo que entretanto foi diminuindo, tendo o gerente da loja reagido, introduzindo uma promoção para alterar este comportamento de decréscimo de vendas. A tabela contém os valores das vendas em várias horas do dia.

   Utilize o método DSC para estimar o instante de tempo em que o número de vendas foi menor. Use para valor inicial $t_1 = 17$, $\delta = 2$, $M = 0.5$ e $\varepsilon = 1$. Faça uma iteração completa, indique se o método convergiu e em caso negativo, qual o valor inicial da segunda iteração e o novo δ. Indique a melhor estimativa para o minimizante.

$t(h)$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
$f(t)$	80	47	25	30	43	45	50	52	53	55	56

3. [**1.25 valor**] Os problemas de "min max" são muito vulgares em Otimização. Considere o seguinte problema:

$$\min\ \max(x_1 x_2, x_1)$$

   Utilize o método de Nelder-Mead considerando o seguinte simplex inicial:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

   Efetue uma iteração verificando o critério de paragem com $\varepsilon = 1$. Apresente a melhor estimativa para o problema.

4. [**1.5 valor**] Uma vidraça retangular com $10m^2$ de área é guarnecida por um friso em que o metro linear do material que é utilizado na horizontal custa 2€ e do material que é aplicado na vertical custa 5€. Pretende-se minimizar o custo do friso.

   (a) Formule este problema como um problema de otimização sem restrições com apenas uma variável x. Denomine a função objetivo por $v(x)$.

   (b) Considere agora que o custo do friso depende também da espessura z do vidro onde vai ser aplicado. A nova função objetivo de duas variáveis, x e z, é da forma:

$$f(x,z) = v(x) + 0.05z^3.$$

   Use o método de segurança de Newton para calcular as dimensões do vidro, de modo a que o custo seja mínimo. Utilize para ponto inicial $(4, 0.1)^T$, $\eta = 0.0001$, $\mu = 0.001$ e $\varepsilon = 0.5$. Faça no máximo 1 iteração com verificação do critério de paragem. Apresente todas as dimensões do vidro e o custo do friso.

NOTA1: caso não tenha resolvido a alínea (a), considere $v(x) = \dfrac{50}{x} + 2x$.

NOTA2: $\dfrac{1}{x} \equiv x^{-1}$, $\dfrac{1}{x^2} \equiv x^{-2}$

Derivadas: $(x^a)' = ax^{a-1}$

FIM