→ Tópicos de matemática discreta - Relações binárias

4 -

4.1 -

A B conjuntos

<=> R relação binária de A em B

• R é uma correspondência de A para B

$R \subseteq A \times B$

produto cartesiano de A por B

$\{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$

$(a,b) \in R$ se a está relacionado com b pela relação R (também escrevemos aRb.)

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

$S = \{(0,1), (1,1), (2,2), (3,2), (4,3)\}$

$\text{Dom } S = A \setminus \{5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$\text{Im } S = \{1, 2, 3\} = B$

d)

A: conjunto de partida

B: conjunto de chegada

• Domínio de S: Dom(S) é o conjunto dos elementos a de A que estão relacionados com algum elemento de B = conjunto dos primeiros componentes dos pares de S

• Imagem de S: Im(S) é o conjunto dos elementos b de B para os quais existe algum $a \in A$ tal que $(a, b) \in S$ = conjunto dos 2º componentes de S

b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

$$\underset{(x,x^2)}{\overset{\|}{}}$$

$Dom(R) = \mathbb{R}$

$Im(R) = \mathbb{R}_0^+$

c) I: relação divide

$A = \{2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 20\}$

$a|b \rightarrow$ o resto da divisão inteira de b por a é 0

$Dom(I) = \{a \in A \mid \exists b \in A \; a|b\} = \{2, 3, 4, 6, \ldots\}$

• Para todo $x \in A$, é claro que $x|x$. Isto significa $\forall x \in A, (x,x) \in I$

$\downarrow$

$x \in Dom(I)$

$x \in Im(I)$

Portanto $Dom(I) = A = Im(I)$

4.2-

a) $R^{-1} = \{(b,a) \in A^2 : (a,b) \in R\}$

$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (10,8)\}$

$R^{-1} = \{(2,2), (4,2), (6,2), (8,10)\}$

b) $R^{-1} \cup S^{-1} = \{(2,2), (4,2), (6,2), (8,10), (2,10)\}$

$S^{-1} = \{(2,10), (8,10)\}$

c) $T \setminus S^{-1} = \{(6,2), (6,4)\}$

d) $T^{-1} \cap S = \{(10,8)\}$

$T^{-1} = \{(2,6), (4,6), (10,8)\}$

4.2 -

e) $S \circ T = \{(8,2), (8,8)\}$

$T = \{(6,2), (6,4), (8,10)\}$

$S = \{(10,2), (10,8)\}$

f) $R \circ T = \{(6,2), (6,4), (6,6), (8,8)\}$

$T = \{(6,2), (6,4), (8,10)\}$

$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (10,8)\}$

g) $S^{-1} \circ S = \{(10,10)\}$

$S = \{(10,2), (10,8)\}$

$S^{-1} = \{(2,10), (8,10)\}$

h) $(S \circ T)^{-1} = \{(2,8), (8,8)\}$

i) $S^{-1} \circ T^{-1} = \{(10,10)\}$

$T^{-1} = \{(2,6), (4,6), (10,8)\}$

$S^{-1} = \{(2,10), (8,10)\}$

j) $T^{-1} \circ S^{-1} = \{(2,8), (8,8)\}$

$S^{-1} = \{(2,10), (8,10)\}$

$T^{-1} = \{(2,6), (4,6), (10,8)\}$

k) $(R \circ S) \circ T = \{(8,2), (8,4), (8,6)\}$

$T = \{(6,2), (6,4), (8,10)\}$

$R \circ S = \{(10,2), (10,4), (10,6)\}$

$S = \{(10,2), (10,8)\}$

$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (10,8)\}$

l) $R \circ (S \circ T) = \{(8,2), (8,4), (8,6)\}$

$S \circ T = \{(8,2), (8,8)\}$

$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (10,8)\}$

43-

a) • $R^{-1} = \{(x,1), (z,1), (y,2) (z,2)\}$

• $S^{-1} = \{(1,x), (3,x), (2,y) (2,w), (3,z)\}$

• $T = S \circ R = \{(1,1) (1,3) (2,2), (2,3)\}$

$R = \{(1,x) (1,z), (2,y), (2,z)\}$

$S = \{(x,1), (x,3), (y,2), (w,2), (z,3)\}$

• $T \circ T = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3)\}$

$T = \{(1,1) (1,3), (2,2) (2,3)\}$

$T = \{(1,1), (1,3), (2,2) (2,3)\}$

• $U = R \circ S = \{(x,x) (x,z) (y,y) (y,z)\}$

$S = \{(x,1), (x,3), (y,2), (w,2), (z,3)\}$

$R = \{(1,x) (1,z), (2,y), (2,z)$

b) $T^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$? V

$T = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3)\}$ $T^{-1} = \{(1,1), (3,1) (2,2), (3,2)\}$

$R^{-1} \circ S^{-1} = \{(1,1) (3,1), (2,2) (3,2)$

$S^{-1} = \{(1,x), (3,x), (2,y), (2,w) (3,z)$

$R^{-1} = \{(x,1), (z,1), (y,2) (z,2)\}$

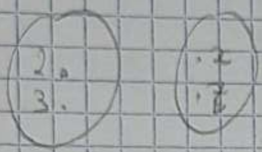
4.3-

c) $Dom(R) = \{1, 2\}$

$Im(R) = \{x, y, z\}$

d) $2^{\#(A \times B)} = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$

e)



$R_1 = \{(2,x), (3,z)\}$

$R_2 = \{(2,z), (3,x)\}$

$R_3 = \{(2,x), (2,z), (3,x)\}$

$R_4 = \{(2,x), (2,z), (3,z)\}$

$R_5 = \{(2,x), (3,x), (3,z)$

$R_6 = \{(2,z), (3,x), (3,z)\}$

$R_7 = \{(2,x), (2,z), (3,z), (3,x)\}$

4.4-

a) $R = R^{-1}$

Ex:

$R = \{(3,3)\}$

$R = \{(3,4), (4,3), (4,4)\}$

b) $R \circ S = S \circ R$

$R = \{(1,2)\}$ $\quad R \circ S = \emptyset = S \circ R$

$S = \{(3,4)\}$

c) $id_A \subseteq R$ e $id_A \nsubseteq R^{-1}$ · não existe mesmas condições

$id_A = \{(a,a) : a \in A\} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

$id_A \subseteq R \Rightarrow (1,1) \in R, (2,2) \in R, (3,3) \in R, (4,4) \in R$

$\Rightarrow (1,1) \in R^{-1}, (2,2) \in R^{-1}, (3,3) \in R^{-1}, (4,4) \in R^{-1}$

d) relação binária de A em B tal que $\text{dom}(R) = \emptyset$

$R = \emptyset$ (relação vazia) $\quad \emptyset \subseteq A \times B$

e) R: de A em B

S: de B em A

$R \circ S = id_B = \{(3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

$S \circ R = id_A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

$R = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6)\}$

$S = \{(3,1), (4,2), (5,3), (4,6)\}$

4.5 -

A conjunto

R: relação binária em A

R é uma relação de equivalência em A

Se:

- R é reflexiva para qualquer $a \in A$, aRa $\}$ $id_A \subseteq A$
- R é simétrica para qualquer $a, b \in A$, $aRb \Rightarrow bRa$ $\}$ $R = R^{-1}$
- R é transitiva para qualquer $a, b, c \in A$, $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$ $\}$ $R \circ R \subseteq R$

a) R_4

b) R_1, R_4

c) R_3 R_2

d) R_3 ?

4.6 -

4.7 -

$A = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$

- $x R y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

$x \in A \quad x R x \Leftrightarrow x^2 = x^2$ ✓ R é reflexiva

$x, y \in A \quad x R y \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y R x$ ✓ R é simétrica

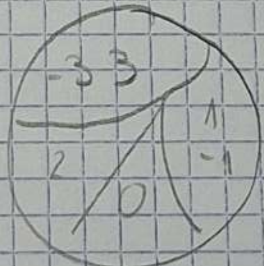
$x, y, z \in A \quad x R y \wedge y R z \Rightarrow x^2 = y^2 \wedge y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2$ R é transitiva

$[-3]_R = \{a \in A : a R -3\}$

$= \{a \in A : a^2 = (-3)^2\}$

$= \{a \in A : a^2 = 9\} = [3]_R$

$[-1]_R = \{-1, 1\} = [1]_R$



$[0]_R = \{0\}$

$[2]_R = \{2\}$

$A/R = \{[-3]_R, [-1]_R, [0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R\}$

$= \{\{-3, 3\}, \{-1, 1\}, \{0\}, \{2\}\}$

↳ é uma partição de A

4.8-

$A = \{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$

$x \sim y \Leftrightarrow x + y = 2m$ para algum $m \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow x + y$ é par

$\Leftrightarrow x, y$ têm a mesma paridade

$[2]_\sim = \{x \in A : x \sim 2\}$

$= \{x \in A : x$ e 2 têm a mesma paridade$\}$

$= \{2, 4, 6\} = [4]_\sim = [6]_\sim$

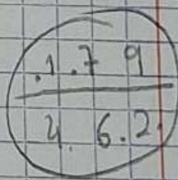
$[1]_\sim = \{x \in A : x \sim 1\}$

$= \{x \in A : x$ e 1 têm a mesma paridade$\}$

$= \{1, 7, 9\} = [7]_\sim = [9]_\sim$

$A/\sim = \{[1]_\sim, [2]_\sim, [4]_\sim, [6]_\sim, [7]_\sim, [9]_\sim\}$

$= \{\{1, 7, 9\}, \{2, 4, 6\}\} \longrightarrow$ partição de A



4.9 -

$A = \{1, 2, 3, 4, 9\}$

4. 11 -

π é uma partição de A se todos os elementos de π são não vazios, são subconjuntos de A, são disjuntos dois a dois e $\bigcup\pi = A$

- π_1 não é partição de A porque $\{2,4\} \cap \{4,6\} \neq \emptyset$
- π_3 não é 〃 〃〃 〃 $\bigcup\pi_3 \neq A$
- π_5 não é partição de A porque $\emptyset \in \pi_5$

b) $[7]_{R_{\pi_2}} = \{3,7\} = R_{\pi_6}$

$[7]_{R_{\pi_4}} = \{7\}$