→ Tópicos de matemática discreta - Teoria elementar de conjuntos

3-

3.1- $A = \{1, -1, \frac{1}{4}, 2, 0, -\frac{1}{2}\}$

a) $\{1, -1, 0, \frac{1}{2}\}$

b) $\{a^2 \in \mathbb{R} \mid a \in A \wedge a^2 \in A\} = \{1, -1, 0, -\frac{1}{4}\}$

c) $\{b \in \mathbb{Z} \mid \exists a \in A \; b = a^2\} = \{1, 0, -\frac{1}{2}\}$

→ $a^2 \mid a \in A \wedge a^2 \in \mathbb{Z}$

d) $\{a \in A \mid a \geq 0 \wedge \sqrt{a} \in A\} = \{1, 0\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \; (a^2 \in A \wedge a \geq 0 \wedge x = \sqrt{a})\} =$

$= \{\sqrt{a} \mid a \in A \wedge a^2 \in A \wedge a \geq 0\} = \{0, 1\}$

f) $\{b \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \; b^2 = a\} = \{\pm\sqrt{a} \in \mathbb{R} \mid a \in A\} =$

$= \{-\sqrt{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}\}$

3.2-

a) $A = \{-1, 1\} \Rightarrow \{a \in A \mid a^2 = 1\}$

b) $B = \{2, 3, 5 \ldots\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ é primo}\}$

c) $C = \{3, 6, 9 \ldots\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ é multiplo de } 3\} = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$

d) $D = \{4, 9, 16, 25\} = \{n^2 \mid n \geq 2 \wedge n \leq 5 \wedge n \in \mathbb{N}\}$

3.3- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$

$\{m \in \mathbb{N} \mid 0 < m^2 < 4\} = \{1, 2\}$

Logo, os 3 conjuntos são iguais

b) $\{1,2,3\} = \{2,3,1,2\} = \{2,3,1,3\}$

c) $\phi = \{\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} = \{1, -1\}$

$\{1, \{1\}\}$

$\Delta \{\} = \phi$

$\{0\} =$

$\{\phi\} =$

3.4-

Δ x objeto A conjunto

- $x \in A$ se x é um dos elementos de A
- $x \notin A$ se x não é elemento de A

Δ A, B conjuntos

- $A \subseteq B$ se todos os elementos de A é elemento de B
- $A \not\subseteq B$ se existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B

a) V

b) F

c) V

d) F

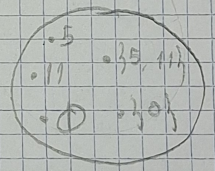
e) V

f) V

g) F, $0 \notin A$

h)

$A = \{5, 11, \{5, 11\}, \{0\}, \phi\}$



3.5-

a) V

b) F

c) F

d) V

e) V

f) V

g) F

h) F

3.6-

a) $\{\phi\}$ é constituído pelo elemento ϕ. Logo $\phi \in \{\phi\}$ (V)

b) Se $\phi \subseteq \{\phi\}$, isso significa que $\underbrace{\forall a \in \phi}_{\text{Imp}}, a \in \{\phi\}$ (V)

3.6-

e) O elemento ϕ não pertence ao conjunto ϕ, porque ϕ não contém elementos ✓

d) $\{\{\phi\}\}$ é constituído pelo elemento $\{\phi\}^{*1}$, não ϕ ~~✓~~ logo $\phi \notin \{\{\phi\}\}$

*1 ϕ ou $\{\}$ * $\{\}$

3.7-

a) $a \in C$ V

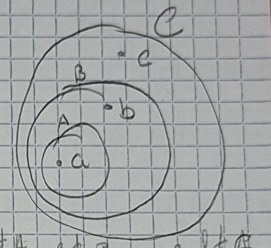
b) $b \notin A$ F

c) $d \in B$

d) $e \notin A$ V

e) $2 \notin A$ V

f) $\{\} \notin A$ V



$d \notin A$ $2 \notin B$ $\{\} \notin B$

3.8-

a) $A \subseteq B \wedge A \notin B$ $A = \{1, 2\}$ $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

todos os elementos de A pertencem a B — o conjunto $\{1,2\} \notin B$ ↵

b) $A \nsubseteq B \wedge A \in B$ $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2, \{1, 2, 3\}, 3\}$

o conjunto $\{1,2,3\} \in B$, ↵

no entanto, nem todos os elementos de $A \subseteq B$

c) $A \nsubseteq B \wedge N \notin B$ $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2\}$

o conjunto $\{1,2,3\} \notin B$ ↵

e nem todos os elementos de $A \subseteq B$

d) $A \subseteq B \wedge A \in B$ $A = \{1\}$ $B = \{1, \{1\}\}$

o conjunto $\{1\} \in B$ e ↵

o elemento $1 \subseteq B$

3.9- $A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}\ x = 2y\} \rightarrow x$ é par

$C = \{x^2 \mid x \in A\} = \{4, 16, 36, 64\}$

- $A \cup C = \{2, 4, 6, 8, 16, 36, 64\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\} = B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}\ x = 2y\} = x$ é par
- $C \cup B = B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N}\ y = 2x\}$?
- $A \cup A = \{2, 4, 6, 8\}$
- $A \cap B = \{2, 4, 6, 8\}$
- $B \cap B = B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N}\ y = 2x\}$
- $B \cup C \cup A = B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N}\ y = 2x\}$
- $C \setminus A = C$ excepto $A = \{16, 36, 64\}$
- $A \setminus B = A$ sem o conjunto dos nº pares $= \emptyset$
- $B \setminus A = B$ sem os nº pertencentes a $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N}\ y = 2x \wedge x > 8\}$

3.10-

a) $A \cup A = A$

$x \in A \vee x \in A \Rightarrow x \in A$

b) $A \setminus B \subseteq A$

- $A \setminus B$ é, no máximo A e, no mínimo $\emptyset$

Tanto A como $\emptyset$ estão contidos em A. Logo $A \setminus B \in A$

-90-

c) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus C) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

$= A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap X = A$

d) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

$A \cap (B \cap \bar{C}) = (A \cap B) \cap \bar{C} = (A \cap B) \setminus C$

• Para todo x,

$x \in A \cap (B \setminus C) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \setminus C$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow \boxed{x \in (A \cap B) \setminus C}$

e) Se $A \cup B = \emptyset$, então $A = \emptyset \wedge B = \emptyset$

$A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$

$\neg (A = \emptyset \wedge B = \emptyset) \Rightarrow \neg (A \cup B = \emptyset)$

ou seja: $A \neq \emptyset \vee B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \neq \emptyset$

• Se $A \neq \emptyset$: existe a t.q. $a \in A$

Mas então, $a \in A \cup B$ e, por isso, $A \cup B \neq \emptyset$

• Se $B \neq \emptyset$: existe b tq. $b \in B$

Mas então, $b \in A \cup B$ e, por isso, $A \cup B \neq \emptyset$

f) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

$(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \cup B) \cap (\overline{B \cap C}) = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$

$= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \cup \underbrace{(B \cap \overline{B})}_{\emptyset \text{ elemento neutro de } \cup} \cup (B \cap \overline{C})$

$= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

3.11 -

Se $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$ então $B = C$

$((A \cup B = A \cup C) \wedge (A \cap B = A \cap C)) \Rightarrow B = C$

3.13 -

a) Se $C \subseteq A \cup B$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$C = \{3, 4, 5\}$ $\quad C \subseteq A \cup B$, no entanto $C \not\subseteq A$ e $C \not\subseteq B$

$B = \{4, 5, 6\}$

b) $(C \subseteq A \vee C \subseteq B) \Rightarrow C \subseteq A \cup B$

A e B estão contidos em $A \cup B$,

e, se estão contido em A ou em B, também está contido em $A \cup B$

3.13 -

c) $((C \subseteq A) \vee (C \subseteq B)) \Rightarrow C \subseteq A \cap B$

$A = \{1, 2, 3\}$

$C = \{2\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

$A \cap B = \{3\}$

- Está contido em A, mas evidentemente, não está contido em $A \cap B$

d) $(C \subseteq A \cap B) \Rightarrow ((C \in A) \wedge (C \in B))$

- Para $C \subseteq A \cap B$, C tem de pertencer a A e a B

3.14 -

A conjunto

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

↳ conjunto dos subconjuntos de A

- Se A tem n elementos então P(A) tem 2^n elementos

$x \in P(A) \Leftrightarrow \underbrace{x \subseteq A}$

↳ x é um subconjunto de A

- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$
- $\phi \in P(A)$, para qq A
- $A \in P(A)$, para qq A

$A = \{1, 5, 7\}$

Obs: $\#A = |A| = 3$, $\#P(A) = 2^3 = 8$

$B = \{\phi, 7, \{1, 5, 7\}\}$ $\#B = 3$, $\#P(B) = ?$

$P(A) = \{\{1\}, \{5\}, \{7\}, \{1,5\}, \{1,7\}, \{5,7\}, \{1,5,7\}, \phi\}$

$P(B) = \{\phi, \{\phi\}, \{7\}, \boxed{\{\{1,5,7\}\}}, \{\phi, 7\}, \{\phi, \{1,5,7\}\}, \{7, \{1,5,7\}\}, \{\phi, 7, \{1,5,7\}\}\}$

$\neq A$

- $A \in P(B)$ → Falso porque $\{1,5,7\}$ não é um dos elementos de B

  $\{1,5,7\} \neq \{\{1,5,7\}\}$

- $A \in P(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$

  Como $A \nsubseteq B$, $A \notin P(B)$

- $A \in P(\mathbb{N})$ → Verdadeiro porque $A \subseteq \mathbb{N}$

- $P(A) \subseteq P(\mathbb{N})$ → Verdadeiro porque $A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow P(A) \subseteq P(\mathbb{N})$

3.15.

$A = \{\emptyset, 2, \{1,2\}\}$

$B = \{0, 2, \{\emptyset\}, \{1\}\} = \{0, 2, 1, \{1\}\}$

↳ $= \#\{\emptyset\} =$ nº de elementos $\{\emptyset\} = 1$

$P(B) = \{\{0\}, \{2\}, \{1\}, \{\{1\}\}, \{0,2\}, \{0,1\}, \{0,\{1\}\}, \{2,1\}, \{2,\{1\}\}$

$\{1,\{1\}\}, \{0,2,1\}, \{0,2,\{1\}\}, \{0,1,\{1\}\}, \{2,1,\{1\}\}, \emptyset,$

$\{0,2,1,\{1\}\}\}$

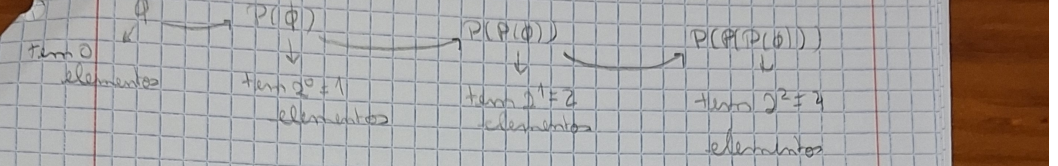
$A \cap P(B) = \{1,2\}$

↓

- 1º - tem de pertencer a A
- 2º ! Tem de ser conjunto !
- 3º Tem de estar contido em B

3.16-

$P(P(P(\emptyset)))$



$P(P(P(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

3.17-

a) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

$A = \{1,2\} \Rightarrow P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \emptyset\}$

$B = \{1,2,3\} \Rightarrow P(B) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \emptyset\}$

$P(A \cap B) = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \emptyset\}$

$A \cap B = \{1,2\}$

$P(A) \cap P(B) = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \emptyset\}$

- $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

$x \in P(A \cap B) \Rightarrow x \subseteq A \cap B \Rightarrow x \subseteq A \wedge x \subseteq B \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in P(A) \wedge x \in P(B) \Rightarrow x \in P(A) \cap P(B)$

b) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

$P(A \cup B) = \{\{1\}, \{1,2\}, \{3\}, \{4\} \ldots\}$

$A \cup B = \{1,2,3\}$

3.18- $A=\{1,2,3\}$ $B=\{a,b\}$ $C=\{5\}$

- $(A\times C)\setminus(C\times A)=\{(1,5),(2,5),(3,5)\}\setminus\{(5,1),(5,2),(5,3)\}=$

3.19-

$C\times(A\cup B)=(C\times A)\cup(C\times B)$

$(x,y)\in C\times(A\cup B) \Leftrightarrow x\in C \wedge y\in A\cup B$

$\Leftrightarrow x\in C \wedge (y\in A \vee y\in B)$

$\Leftrightarrow (x\in C \wedge y\in A) \vee (x\in C \wedge y\in B)$

$\Leftrightarrow (x,y)\in (C\times A) \vee (x,y)\in (C\times B)$

$\Leftrightarrow (x,y)\in (C\times A)\cup(C\times B)$

- Probamos que para todo (x,y)

$(x,y)\in C\times(A\cup B) \Leftrightarrow (x,y)\in (C\times A)\cup(C\times B)$

Quedando,

$C\times(A\cup B)=(C\times A)\cup(C\times B)$

3.20-

3.21-

a) $\{1\} \in A$ e $\{1\} \subseteq A$ $A = \{\{1\}, 1\}$

$\{1\} \in A$ ↓ ↳ $1 \in A$

b) $A \cap \emptyset = A$ $A = \{\emptyset\}$

c) $A \cap B = A \cap C$ e $B \neq C$

$A = \{1, 2, 3\}$ $A \cap B = \{2\}$

$B = \{2, 6, 8\}$ $A \cap C = \{2\}$ $\Rightarrow =$ mas $B \neq C$

$C = \{2\}$

d) $B = C$ e $A \cap B \neq A \cap C$

mas existe

e) $A \times B \subseteq B \times C$ e $A \not\subseteq B$

$B = \emptyset$ $\Rightarrow A \not\subseteq B$

$A = 1$

$A \times B = \emptyset \subseteq B \times C = \emptyset$

f) $A \cup B = A \cup C$ e $B \neq C$

$A = \{1, 2, 3\}$ $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ $\Rightarrow A \cup B = A \cup C$ mas,

$B = \{1, 2\}$ $A \cup C = \{1, 2, 3\}$ $B \neq C$

$C = \{1, 3\}$

g)

h) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

Se $A = B$ então

$P(A \cup B) = P(A \cup A) = P(A)$

$P(A) \cup P(B) = P(A) \cup P(A) = P(A)$

i) $P(A) \cap A \neq \emptyset$

$A = \{1, 2\}$

$P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \emptyset\}$ $\Rightarrow P(A) \cap A = \{1,2\} \neq \emptyset$

3.22-

- A finito

$P(A \times A)$ tem 2^{m^2} elementos

$P(A) \times P(A)$ tem 2^{2m} elementos

| $m = 0$, $m^2 = 2m$
| $m = 1$, $m^2 = 2m$
| $m = 2$, $m^2 = 2m$
$m = 3$, $m^2 > 2m$

Para $m > 3$, $m^2 > 2m$

2.23-

1 conjunto

- π : família de conjuntos
  ↳ conjuntos em que os elementos são conjuntos

- π é uma partição de A se todos os elementos de π são não fazios, são subconjuntos de A, são disjuntos dois a dois e $\cup\pi = A$

  Para quaisquer $x, y \in \pi$ ↓
  tais que $x \neq y$ temos $x \cap y \neq \emptyset$

$A = \{1,2,3\}$

$\pi_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

$\pi_2 = \{\{1,2\},\{3\}\}$

$\pi_3 = \{\{1,3\},\{2\}\}$

$\pi_4 = \{\{2,3\},\{1\}\}$

$\pi_5 = \{\{1,2,3\}\}$

$B = \{1,\{2\},N\}$

$\pi_1 = \{\{1\},\{\{2\}\},\{N\}\}$

$\pi_2 = \{\{1,\{2\}\},\{N\}\}$

$\pi_3 = \{\{1,N\},\{\{2\}\}\}$

$\pi_4 = \{\{N,\{2\}\},\{1\}\}$

$\pi_5 = \{\{1,\{2\},N\}\}$

⚠ $\{1\} \cap \{N\} = \emptyset$
eles não são iguais!!!

$\{1\} \cap \{N\} = \emptyset$
↳ elemento !!!

elemento ↓
1

→ Teoria de números - Ficha 2

EPTN

12-

• Dados $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, o menor inteiro positivo k da forma $ax + by$ com $x, y \in \mathbb{Z}$ é o $mdc(a,b)$

• Sendo $d = m.d.c(a,b)$ sabe-se que $d \in \mathbb{Z}^+$, $d = ax' + by'$ para alguns $x', y' \in \mathbb{Z}$

• Seja d' um inteiro positivo tal que $d' = ax'' + by''$, para alguns $x'', y'' \in \mathbb{Z}$. Uma vez que $d = m.d.c(a,b)$ então $d \mid a$ e $d \mid b$ logo $d \mid (ax'' + by'')$. Como $d, d' \in \mathbb{Z}^+$ concluímos que $d \leq d'$

• Apliquemos o Teorema de Euclides para determinar $m.d.c(55, 22)$

Temos

$55 = 2 \times 22 + 11$ (1)

$22 = 2 \times 11 + 0$

donde concluímos que $mdc(55, 22) = 11$

• De 1 obtemos $11 = (-2) \times 22 + 1 \times 55$

$33x + 14y = 115$

$33 = 2 \times 14 + 5$

$14 = 2 \times 5 + 4$

$5 = 1 \times 4 + 1$

$4 = 4 \times 1 + 0$ // → Fim

$\therefore mdc(33, 4) = 1$

Como $1 \mid 115$ a eq tem solução

13-

• A eq $ax + bx = c$ tem solução se e só se

a) $6x + 51 = 22$

$51 = 8 \times 6 + 3$

$6 = 2 \times 3$

• Concluímos que $m.d.c(51, 6) = 3$

Como $3 \nmid 22$ $6x + 51y = 22$ não tem solução

b) $33x + 14y = 115$

$33 = 14 \times 2 + 5$

$14 = 2 \times 5 + 4$

$5 = 4 \times 1 + 1$

$4 = 4 \times 1 + 0$

• Concluímos que $m.d.c(33, 14) = 1$

Como $1 \mid 115$ $33x + 14y = 115$ tem solução

c) $14x + 35y = 93$

$35 = 2 \times 14 + 7$

$14 = 2 \times 7$

- Concluímos que $mdc(35, 14) = 7$
- Como $7 \nmid 93$, $14x + 35y = 93$ não tem solução

14-

a) $56x + 72y = 40$

$72 = 1 \times 56 + 16$ (1)

$56 = 3 \times 16 + 8$ (2)

$16 = 2 \times 8 + 0$

- Concluímos que $mdc(56, 72) = 8$
- Como $8 \mid 40$ então, $56x + 72y = 40$ tem solução

$8 = 56 - 3 \times 16$ (2)

$= 56 - 3 \times (72 - 1 \times 56)$ (1)

$= 56 - 3 \times 72 + 3 \times 56 = -3 \times 72 + 3 \times 56 + 56 = -3 \times 72 + 4 \times 56$

Uma vez que

$8 = 4 \times 56 + (-3) \times 72$

então $40 = 5 \times 8 = 20 \times 56 + (-15) \times 72$ ($\times 5$; $\times 5$; $8 = 40$, $\times 5$)

Logo, $(20, -15)$ é uma solução particular

- Todos os pares $(x, y) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{cases} x = 20 + \frac{72}{8} k \\ y = 15 - \frac{56}{8} k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{C} = \begin{cases} x = 20 + 9k \\ y = 15 - 7k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

14-

b) $24x + 138y = 18$

$138 = 24 \times 5 + 18$ (1)

$24 = 1 \times 18 + 6$ (2)

$18 = 3 \times 6 + 0$

• Concluimos que o $m.d.c(138, 24) = 6$

Como $6 | 18$, a eq tem solução

$6 = 24 - (1 \times 18)$

$= 24 - (1 \times (138 - 24 \times 5))$

$= -1 \times 138 + 6 \times 24$

De $6 = -1 \times 138 + 6 \times 24$ segue que

$18 = (-3) \times 138 + 18 \times 24$ Logo

• Todos os pares $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tais q

$\begin{cases} x = 18 + \frac{138}{6} k \\ y = -3 - \frac{24}{6} k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} x = 18 + 23k \\ y = -3 + 4k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$ são soluções de eq

• Resolução de eq diofantinas
$ax + by = c$

• calcular o $mdc(a,b)$ e ter a certeza que $mdc(a,b) | c$

• fazer os contas "de trás para a frente" usando os contas feitas do mdc

$mdc(a,b) = ua + vb$

• multiplicar por um número de forma a que $m \times mdc(a,b) = c$ e fica

$c = (m \times u) \times a + (m \times v) \times a$

• Logo, o par $(m \times u, m \times v)$ é solução particular de eq

• Todos os pares $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tais que

$\begin{cases} x = (m \times u) + \frac{b}{mdc(a,b)} k \\ y = (m \times v) - \frac{a}{mdc(a,b)} k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$ são soluções de eq

??? e) $221x + 35y = 11$

$221 = 35 \times 6 + 11$

$35 = 3 \times 11 + 2$

$11 = 5 \times 2 + 1$

$2 = 2 \times 1 + 0$

• Concluimos que o $mdc(221, 35) = 1$

Como $1 | 11$, a eq tem solução

$1 = 11 - 5 \times 2$

$= 11 - 5 \times (35 - 3 \times 11) =$

$= 221 - 35 \times 6 - 5(35 - 3(221 - 35 \times 6)) =$

$= \overline{221 - 35 \times 6 - 5 \times 35 + 15 \times 221 - 15 \times 6 \times 35} =$

$= 16 \times 221 - 101 \times 35$

$11 = 11 \times 1 = 11 \times (16 \times 221 - 101 \times 35) =$

$= 176 \times 221 - 1111 \times 35$

Logo, $(176, -1111)$ é solução particular da equação.

Todos os pares $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, tais que

$\begin{cases} x = 176 + \frac{35}{1} k \\ y = -1111 - \frac{221}{1} k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 176 + 35k \\ y = -1111 - 221k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

35 | 5 | 2
7 | 5
35 | 3 | 2
2 | 3 | 1
2 | 1 | 0
35 | 6 | 3
2 | 1 | 0

15-

a) $18x + 5y = 48$

$18 = 3 \times 5 + 3$

$5 = 1 \times 3 + 2$

$3 = 1 \times 2 + 1$

$1 = 1 \times 1 + 0$

Concluímos que $mdc(18,5) = 1$

Como $1 | 48$, a eq tem solução

- De 1 e 2 temos:

$1 = 3 - 2 \times 1$

$= 3 - (5 - 3 \times 1) \times 1$

$= 18 - 5 \times 3 - (5 - 3 \times 1) \times 1$

$=$

15-

b) $54x + 21y = 906$

$54 = 2 \times 21 + 12$

$21 = 1 \times 12 + 9$

$12 = 1 \times 9 + 3$

$3 = 1 \times 3 + 0$

- Concluimos que $\text{mdc}(54, 21) = 3$

Como $3 \mid 906$ (3×302) a eq tem solução

- De 1 e 2 temos

$3 = 12 - 1 \times 9$

$= 12 - 1 \times (21 - 1 \times 12)$

$= 2 \times 12 - 1 \times 21$

$= 2 \times (54 - 2 \times 21) - 1 \times 21$

$= 2 \times 54 + (-5) \times 21$

$= 2 \times 54 + (-5) \times 21$

Assim,

$$\begin{cases} x = 604 + \frac{21}{3}k \\ y = -1510 - \frac{54}{3}k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} x = 604 + 7k \\ y = -1510 - 18k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- As soluções da equação são todos os pares $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tais que

$$\begin{cases} x = 604 + 7y \\ y = -1510 - 18k \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

, ou seja tais que

$$\begin{cases} x = 604 + 7k \\ y = -1510 - 18k \\ k > -\frac{604}{7} \simeq -86,3 \\ k < -\frac{1510}{18} \simeq 83,9 \end{cases}$$

- Logo as soluções positivas são para $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tais que

$$\begin{cases} x = 604 + 7y \\ y = -1510 - 18k \end{cases} \quad c/ k \in \mathbb{Z} \quad k = \{-86, -85, -84, -83\}$$

7.7) c) $5x - 11y = 29$

$11 = 2 \times 5 + 1$

$5 = 5 \times 1 + 0$

$1 = 11 - 2 \times 5$

Concluimos que $m.d.c(5, 11) = 1$

como $1 | 29$ a eq tem solução

De $1 = 11 - 2 \times 5$ segue que $29 = 11 \times 29 - 58 \times 5$ logo $(29, -58)$ é uma solução da eq

Assim

$$\begin{cases} x = 319 + (-58)k \\ y = 145 + 29k \end{cases}$$

16-

- Pretendemos determinar inteiros a, b tais $a>0$, $b>0$, $a=8x$ para algum $x \in \mathbb{Z}$, $b=15y$ para algum $y \in \mathbb{Z}$, $4=a-b$
- No sentido de determinar a, b temos de determinar $x, y \in \mathbb{Z}^+$ tais que $4 = 8x - 15y$

$15 = 1 \times 8 + 7$

$8 = 1 \times 7 + 1$

$1 = 1 \times 1 + 1$

- Logo m.d.c $(8,15) = 1$. Como, $1 \mid 4$ a eq tem solução

- $1 = 8 - 1 \times 7$

$= 8 - 1 \times (15 - 1 \times 8)$

$= 2 \times 8 - 1 \times (15)$

Logo $y = 4 \times 8 = 8 \times 8 + 4 \times 15$

→ Assim $(8,4)$ é uma solução

- As soluções positivas da eq $8x - 15y = 4$ são todos os pares $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tais que

$$\begin{cases} x = 8 - \frac{15}{1} k \\ y = 4 - \frac{8}{1} k \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ isto é} \quad \begin{cases} x = 8 - 15k \\ y = 4 - 8k \\ k < \frac{8}{15} \\ k < \frac{4}{8} \end{cases}$$

- As soluções positivas da eq $8x - 15y = 4$ são os pares $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tais que

$$\begin{cases} x = 8 - 15k \\ y = 4 - 8k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}_0$$

- Exemplos de pares (a,b) tais que $a, b \in \mathbb{Z}^+$ $a = 8x$, $b = 15y$ e

17-

$16x + (-56)y = 42$

$56 = 3 \times 16 + 8$

$16 = 2 \times 8 + 0$

• Logo $mdc(16, 56) = 8$. Como $8 \mid 42$, a eq tem solução

Assim

$8 = (-56) + (-3) \times 16$

Logo $y = 7 \times 8 = (-7) \times (56) - (-21) \times 16$

Assim $(-7 \text{ e } -21$ são solução da eq?