tópicos de matemática discreta

LEI

cláudia mendes araújo

departamento de matemática | universidade do minho

noções básicas de lógica

A lógica consiste no estudo dos princípios e das técnicas do raciocínio, procurando definir linguagens formais que permitam representar de forma precisa e sem ambiguidade a linguagem natural e definindo regras que permitam a construção rigorosa e sistemática de argumentos válidos.

Desempenha, pois, um papel fundamental em qualquer área do saber, em particular na Matemática e na Informática.

Na Informática, a lógica é usada, por exemplo, no desenvolvimento de linguagens de programação, na verificação da correção de programas e nos circuitos digitais.

Linguagem

Para exprimir argumentos precisos e rigorosos sobre afirmações é indispensável uma linguagem simples e clara, na qual as afirmações efetuadas não tenham significado ambíguo.

A linguagem corrente não tem estes requisitos.

Um sistema lógico apresenta as seguintes componentes:

sintaxe: é o conjunto de símbolos e regras de formação que definem as palavras, designadas por *fórmulas*, que podem ser utilizadas para representar de forma precisa, concisa e sem ambiguidade a linguagem natural (ou parte dela);

semântica: é o conjunto de regras que associam um *significado* às fórmulas;

sistema dedutivo: é um sistema, constituído por *regras de inferência* e, eventualmente, algumas fórmulas designadas por *axiomas*, utilizado para construir demonstrações formais.

Ao longo dos anos, foram definidos diversos sistemas lógicos. Nesta unidade curricular, estudaremos algumas noções básicas associadas ao **Cálculo Proposicional Clássico** e ao **Cálculo de Predicados Clássico**, limitando-nos à sintaxe e à semântica. Estes temas serão aprofundados na UC de Lógica, onde também será estudado um sistema dedutivo para cada um destes cálculos.

Na linguagem natural, podemos encontrar diversos tipos de frase – declarativas, exclamativas, interrogativas, imperativas. Na construção de um argumento, recorremos apenas a frases declarativas.

As frases declarativas podem ser simples ou compostas.

exemplo [frases simples]:

Braga tem 193324 *habitantes.*
Hoje é segunda-feira.
$2 + 2 = 5$.

No Cálculo Proposicional, cada frase simples é encarada como um elemento indivisível, não se diferenciando partes da afirmação como o nome ou o verbo. Interessa-nos considerar, apenas, frases declarativas sobre as quais é possível dizer objetivamente se são verdadeiras ou falsas, as chamadas **proposições**.

Representaremos as proposições simples por $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ (com $n \in \mathbb{N}_0$).

A estes símbolos chamamos **variáveis proposicionais**.

A partir de frases declarativas simples e recorrendo a expressões como "não", "e", "ou", "se... então", "... se e só se...", obtêm-se frases mais complexas, designadas por **frases compostas**.

exemplo [frases compostas]:

[1] *Braga tem* 193324 *habitantes e conta com mais de* 2000 *anos de história como cidade.*
[2] *Se hoje é segunda-feira, então amanhã é terça-feira.*
[3] *Se* $2 + 2 = 5$, *então* $2 + 2 + 1 = 6$.

No Cálculo Proposicional, as proposições compostas são representadas pelas chamadas **fórmulas do Cálculo Proposicional** usando:

- as variáveis proposicionais;
- os símbolos $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, chamados **conetivos proposicionais**, e designados, respetivamente, por **absurdo**, **negação**, **conjunção**, **disjunção**, **implicação** e **equivalência**;
- os símbolos auxiliares "(" e ")".

Representemos por p_n e p_m duas proposições ($n, m \in \mathbb{N}_0$).

$\neg p_n$

A frase "não p_n" designa-se por **negação de** p_n e é representada por $\neg p_n$.
A $\neg p_n$ também podemos associar as leituras "é falso p_n" e "não é verdade p_n".

$p_n \wedge p_m$

A frase "p_n e p_m" designa-se por **conjunção de** p_n **e** p_m e é representada por $p_n \wedge p_m$.

$p_n \vee p_m$

A frase "p_n ou p_m" designa-se por **disjunção de** p_n **e** p_m e é representada por $p_n \vee p_m$.

$p_n \to p_m$

A frase "Se p_n, então p_m" designa-se por **implicação de p_n, p_m** e é representada por $p_n \to p_m$.

A $p_n \to p_m$ também podemos associar as leituras

"p_n implica p_m"

"p_n é suficiente para p_m"

"p_n só se p_m"

"p_n somente se p_m"

"p_m é necessária para p_n"

"p_m se p_n"

"p_m sempre que p_n".

A p_n chamamos **antecedente** ou **hipótese** da implicação e a p_m chamamos **consequente** ou **conclusão**.

$p_n \leftrightarrow p_m$

A frase "p_n se e só se p_m", que resulta da conjunção das implicações "Se p_n, então p_m" e "Se p_m, então p_n", designa-se por **equivalência de** p_n **e** p_m e é representada por $p_n \leftrightarrow p_m$.

A $p_n \leftrightarrow p_m$ também se associam as leituras "p_n é equivalente a p_m" e "p_n é necessário e suficiente para p_m".

Ao representarmos frases compostas, recorremos aos símbolos auxiliares “(” e “)”, de modo a evitar ambiguidades.

exemplo:

Consideremos as seguintes frases e as variáveis proposicionais que as representam:

p_0 : Braga tem 193324 habitantes.

p_1 : Braga conta com mais de 2000 anos de história como cidade.

p_2 : Hoje é segunda-feira.

p_3 : Amanhã é terça-feira.

p_4 : Amanhã tenho aulas de tarde.

p_5 : $2 + 2 = 5$.

p_6 : $2 + 2 + 1 = 6$.

As frases compostas

[1] *Braga tem* 193324 *habitantes e conta com mais de* 2000 *anos de história como cidade.*
[2] *Se hoje é segunda-feira, então amanhã é terça-feira e tenho aulas de tarde.*
[3] *Se* $2 + 2 = 5$, *então* $2 + 2 + 1 = 6$.

podem ser representadas, respetivamente, pelas seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

[1] $p_0 \wedge p_1$ *ou* $(p_0 \wedge p_1)$
[2] $p_2 \to (p_3 \wedge p_4)$ *ou* $(p_2 \to (p_3 \wedge p_4))$
[3] $p_5 \to p_6$ *ou* $(p_5 \to p_6)$

Estipulados os símbolos que definem o **alfabeto** *da linguagem do Cálculo Proposicional, podemos, agora, definir as* **palavras** *destas linguagem.*

O conjunto das **fórmulas do Cálculo Proposicional** é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:

(F_1) $\perp$ é uma fórmula;

(F_2) toda a variável proposicional é uma fórmula;

(F_3) se φ é uma fórmula, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula;

(F_4) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$ é uma fórmula;

(F_5) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \vee \psi)$ é uma fórmula;

(F_6) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é uma fórmula;

(F_7) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é uma fórmula.

exemplo:

[1] *A palavra* $((\neg p_0) \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$ *é uma fórmula do Cálculo Proposicional, uma vez que:*

i. *Pela regra* (F_2), *as variáveis proposicionais* p_0, p_1 *e* p_2 *são fórmulas;*

ii. *Por i. e pela regra* (F_3), $(\neg p_0)$ *é uma fórmula;*

iii. *Por i. e pela regra* (F_4), $(p_1 \wedge p_2)$ *é uma fórmula;*

iv. *Por ii., iii. e pela regra* (F_6), $((\neg p_0) \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$ *é uma fórmula;*

[2] *As palavras* $\neg p_0 \wedge$, $\rightarrow p_0$, $(p_0 \vee p_1$ *não são fórmulas do Cálculo Proposicional.*

Para que uma palavra seja considerada uma fórmula do Cálculo Proposicional, é necessário que os parêntesis ocorram de acordo com as regras que definem o conjunto de fórmulas.

No entanto, para simplificar, é habitual omitirmos os parêntesis extremos e os parêntesis à volta da negação.

exemplo:

A fórmula

$$(((\neg p_0) \vee p_1) \leftrightarrow (p_2 \wedge (\neg p_0)))$$

pode ser representada pela palavra

$$(\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_0).$$

A palavra $\neg(p_0 \vee \neg p_1)$ *é uma representação da fórmula* $(\neg(p_0 \vee (\neg p_1)))$, *ao passo que* $\neg p_0 \vee \neg p_1$ *não o é.*

A fórmula $(p_0 \wedge (p_1 \vee p_2))$ *pode ser representada por* $p_0 \wedge (p_1 \vee p_2)$ *mas não pode ser representada por* $p_0 \wedge p_1 \vee p_2$.

Semântica

A sintaxe do Cálculo Proposicional não nos permite atribuir qualquer significado às fórmulas. De facto, uma fórmula, por si só, não tem qualquer significado – este depende da interpretação associada aos símbolos.

exemplo:

Se p_0 *representar a afirmação* "$2 \times 7 = 14$" *e* p_1 *representar a afirmação* "$1 + 2 \times 7 = 15$", *então a fórmula* $(p_0 \to p_1)$ *representa a afirmação* "*Se* $2 \times 7 = 14$, *então* $1 + 2 \times 7 = 15$", *que é verdadeira.*

Por outro lado, se p_0 *representar a afirmação* "$2 \times 7 = 14$" *e* p_1 *representar a afirmação* "$1 + 2 \times 7 = 16$", *então a fórmula* $(p_0 \to p_1)$ *representa a afirmação* "*Se* $2 \times 7 = 14$, *então* $1 + 2 \times 7 = 16$", *que é falsa.*

A semântica do Cálculo Proposicional consiste na atribuição de **valores de verdade** às suas fórmulas.

Em lógica clássica, são considerados dois valores de verdade.

Os valores lógicos (ou valores de verdade) do Cálculo Proposicional são **verdadeiro** (**V** ou **1**) e **falso** (**F** ou **0**).

Como referimos anteriormente, interessa-nos considerar frases declarativas sobre as quais se pode decidir acerca do seu valor lógico, as proposições.

exemplo:

Consideremos as seguintes frases:

[1] *Lisboa é a capital de Portugal.*

[2] $2 + 3 = 6$.

[3] *Quando é que vamos almoçar?*

[4] *Toma um café.*

[5] *2+x=6.*

[6] *Todo o número inteiro maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de dois números primos.*

As frases 1, 2 e 6 são proposições:

a afirmação 1 é verdadeiras, enquanto que a afirmação 2 é falsa;

a afirmação 6 é conhecida como a *Conjetura de Goldbach (1742)* – até ao momento, não existe uma prova da sua veracidade ou da sua falsidade, mas será possível associar-lhe um e um só dos dois valores lógicos.

As restantes frases não são proposições:

as frases 3 e 4 não são do tipo declarativo e, portanto, não é possível associar-lhes um dos valores lógicos;

a frase 5, sem haver um contexto prévio de atribuição de um valor concreto a x, não é nem verdadeira nem falsa (de notar que a frase se refere a uma variável).

Uma proposição diz-se uma **proposição simples** se se tratar de uma frase declarativa simples. Diz-se uma **proposição composta** se for uma frase declarativa composta.

A veracidade de uma frase simples pode depender do contexto em que esta é considerada.

Por exemplo, a afirmação "Este livro tem uma capa vermelha." pode ser verdadeira ou falsa, dependendo do livro em causa.

Também a decisão sobre o valor lógico de uma frase composta pode depender do contexto em que se insere. No entanto, para saber se uma frase composta é verdadeira ou falsa, basta saber o que acontece com as frases simples que a compõem.

A afirmação "Este livro tem uma capa vermelha e está escrito em português." é verdadeira para alguns livros e falsa para outros. Porém, é verdadeira sempre que ambas as frases simples que a compõem forem verdadeiras.

exemplo:

Consideremos as seguintes proposições:

[1] *2 é um número par.*

[2] *Todo o número primo é ímpar.*

[3] *2 é um número par e todo o número primo é ímpar.*

A proposição 1 é uma proposição simples que assume o valor lógico verdadeiro, enquanto que a proposição 2 é uma proposição simples que assume o valor lógico falso.

A proposição 3 é composta: obtém-se a partir da conjunção de duas proposições simples. Como uma das proposições simples que a compõem é falsa, assume também o valor lógico falso.

No Cálculo Proposicional, não se pretende determinar se uma frase simples é ou não verdadeira. O objetivo é estudar a veracidade das proposições compostas a partir da verdade ou falsidade das frases que as compõem e do significado dos conetivos.

O valor lógico de uma proposição obtida por aplicação de um **conetivo** é determinado pelo conetivo e pelo valor lógico das proposições às quais o conetivo é aplicado.

Por exemplo, quando se aplica a uma proposição φ o conetivo **negação** obtém-se a proposição $\neg\varphi$ de valor lógico oposto, isto é,

- se φ tem valor lógico 1, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 0;
- se φ tem valor lógico 0, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 1.

A cada **conetivo** pode ser associada uma **função de verdade**, a qual pode ser apresentada sob a forma de uma tabela, chamada a **tabela de verdade** do conetivo.

O conetivo $\neg$ tem associada uma função de verdade unária e a sua tabela de verdade é a seguinte, onde φ representa uma proposição arbitrária:

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

exemplo:

A proposição "24 é divisível por 8." é verdadeira. A sua negação, "24 não é divisível por 8." é falsa, uma vez que $24 = 8 \times 3$.

Dadas duas proposições φ e ψ, a conjunção de φ e ψ é verdadeira somente se ambas as proposições que a compõem são verdadeiras. Assim, $\wedge$ está associado a uma função de verdade binária que pode ser descrita pela tabela de verdade seguinte:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

exemplo:

As proposições "24 é divisível por 8." e "56 é divisível por 8." são verdadeiras. Por outro lado, a proposição "28 é divisível por 8." é falsa. A proposição "24 e 56 são divisíveis por 8.", que resulta da conjunção das duas primeiras proposições atrás referidas, é verdadeira. A proposição "28 e 56 são divisíveis por 8." é falsa.

Dadas duas proposições φ e ψ, a disjunção de φ e ψ é falsa somente se ambas as proposições que a compõem são falsas. O conetivo $\vee$ tem associada uma função de verdade binária e a sua tabela de verdade é a seguinte:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

exemplo:

A proposição "24 não é divisível por 8 ou 5 não é um número primo." é falsa pois é a disjunção de duas proposições falsas. A proposição "24 não é divisível por 8 ou 100 é divisível por 4." é verdadeira, pois uma das proposições que a compõem é verdadeira.

Dadas duas proposições φ e ψ, $\varphi \rightarrow \psi$ é verdadeira se ψ é verdadeira sempre que φ é verdadeira. Equivalentemente, a proposição $\varphi \rightarrow \psi$ é falsa se e só se φ é verdadeira e ψ é falsa. Assim, o conetivo $\rightarrow$ está associado a uma função de verdade binária, descrita pela tabela de verdade

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

exemplo:

Consideremos as seguintes proposições:

[1] *Se* $3 > 1$, *então* $2 > 1$.

[2] *Se* $3 > 1$, *então* $1 > 2$.

[3] *Se* $1 > 3$, *então* $2 > 1$.

[4] *Se* $1 > 3$, *então* $1 > 2$.

A proposição 2 é falsa, ao passo que as restantes são verdadeiras.

Dadas duas proposições φ e ψ, $\varphi \leftrightarrow \psi$ é verdadeira se ψ e φ são simultaneamente verdadeiras ou simultaneamente falsas. Ao conetivo $\leftrightarrow$ está, portanto, associada uma função de verdade binária, descrita pela tabela de verdade seguinte:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

exemplo:

Consideremos as seguintes proposições:

[1] $3 > 1$ *se e só se* $2 > 1$.

[2] $3 > 1$ *é equivalente a* $1 > 2$.

[3] $1 > 3$ *é necessário e suficiente para* $1 > 2$.

A proposição 2 é falsa, ao passo que as restantes são verdadeiras.

Recorde-se que o conjunto das fórmulas do Cálculo Proposicional é o conjunto definido indutivamente pelas regras (F_1) a (F_7).

Assim, para atribuir um valor lógico às fórmulas começamos por atribuir um valor lógico ao conetivo $\perp$. O conetivo $\perp$ é uma fórmula que tem sempre o valor lógico 0. Assim, $\perp$ está associado a uma função de verdade que é uma constante (função $0-$ ária).

$\perp$
0

As variáveis proposicionais podem tomar o valor lógico 1 ou 0.

O valor lógico de uma fórmula φ é determinado pelos valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem em φ e pelas funções de verdade associadas aos conetivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.

As tabelas de verdade dos conetivos podem ser sintetizadas da seguinte forma, onde φ e ψ são fórmulas,

$\perp$
0

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \to \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Temos que a fórmula

- $\neg\varphi$ é **verdadeira** se e só se φ é uma fórmula **falsa**.
- $\varphi \wedge \psi$ é **verdadeira** se e só se φ e ψ são ambas **verdadeiras** e, portanto, $\varphi \wedge \psi$ é **falsa** se e só se pelo menos uma das fórmulas, φ ou ψ, é **falsa**.
- $\varphi \vee \psi$ é **falsa** se e só se φ e ψ são ambas **falsas**, donde $\varphi \vee \psi$ é **verdadeira** se e somente se pelo menos uma das fórmulas, φ ou ψ, é **verdadeira**.
- $\varphi \to \psi$ é **falsa** se e só se φ é **verdadeira** e ψ é **falsa**.
- $\varphi \leftrightarrow \psi$ é **verdadeira** se e só se φ e ψ têm o **mesmo valor lógico**.

Conhecidos os valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula, esta tem associado um e um só **valor lógico**. Na análise de qual será o valor lógico de uma fórmula, relacionado-o com os valores lógicos das variáveis que nela ocorrem, é útil o recurso a tabelas de verdade.

exemplo:

Queremos estudar o valor lógico da fórmula $\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$.

Esta fórmula tem duas variáveis, p_0 *e* p_1, *pelo que se torna necessário considerar todas as combinações possíveis dos valores lógicos de* p_0 *e* p_1.

Como cada variável pode assumir um de dois valores lógicos (0 ou 1), existem 2^2 *combinações possíveis. Logo, a tabela de verdade terá 4 linhas.*

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Para cada caso, determinamos primeiro o valor lógico de $\neg p_0$ *e de* $p_1 \vee p_0$*, para podermos, depois, determinar o valor lógico de* $\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$*.*

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1	0	1	
1	0	0	1	
0	1	1	1	
0	0	1	0	

Da análise da seguinte tabela de verdade,

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1	0	1	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

podemos concluir que a fórmula $\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$ *é verdadeira apenas quando* p_0 *é falsa e* p_1 *é verdadeira.*

exemplo:

Estudemos, agora, o valor lógico da fórmula $\neg(p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2$.

Esta fórmula tem três variáveis, p_0, p_1 *e* p_2, *pelo que existem* 2^3 *combinações dos valores lógicos de* p_0, p_1 *e* p_2.

Logo, a tabela de verdade terá 8 linhas:

p_0	p_1	p_2	$p_0 \vee p_1$	$\neg(p_0 \vee p_1)$	$\neg(p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

Analisando a tabela, podemos concluir que a fórmula $\neg(p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2$ *é falsa apenas quando as três variáveis proposicionais,* p_0, p_1 *e* p_2, *são falsas.*

Se φ é uma **fórmula com n variáveis proposicionais**, então existem 2^n combinações possíveis para os valores lógicos das variáveis que ocorrem em φ.

Assim, uma **tabela de verdade de φ terá 2^n linhas**.

Uma **tautologia** é uma fórmula que assume sempre o valor lógico verdadeiro, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.

exemplo:

Para cada $n, m \in \mathbb{N}_0$, as fórmulas $p_n \vee \neg p_n$, $p_n \to p_n$ e $p_n \to (p_n \vee p_m)$ são tautologias.

Uma **contradição** é uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.

exemplo:

As fórmulas $p_n \wedge \neg p_n$ e $p_n \leftrightarrow \neg p_n$ são contradições para todo o $n \in \mathbb{N}_0$.

A negação de uma tautologia é uma contradição.

(observação: nem toda a contradição é a negação duma tautologia)

Se φ e ψ forem duas fórmulas do Cálculo Proposicional e p for uma variável proposicional, representamos por $\varphi[\psi/p]$ (lê-se "φ com ψ no lugar de p") a fórmula que se obtém de φ susbstituindo todas as ocorrências de p por ψ.

exemplo:

Se $\varphi = \neg p_0 \to (p_1 \vee p_0)$ *e* $\psi = p_1 \wedge p_2$, *então*

$$\varphi[\psi/p_0] = \neg(p_1 \wedge p_2) \to (p_1 \vee (p_1 \wedge p_2)).$$

Para quaisquer fórmulas φ e ψ e qualquer variável proposicional p, se φ for uma tautologia, então $\varphi[\psi/p]$ também será tautologia e se φ for uma contradição, então $\varphi[\psi/p]$ também será contradição.

exemplo:

Como $p_0 \to (p_0 \vee p_1)$ é uma tautologia, qualquer fórmula da forma $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$ é uma tautologia.

Existem fórmulas que, embora distintas, assumem o mesmo valor lógico para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis proposicionais que nelas ocorrem.

Se φ e ψ foram duas fórmulas nessas condições, facilmente concluímos que $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Nesse caso, dizemos que φ e ψ são **logicamente equivalentes** e escrevemos $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

exemplo:

As fórmulas $\varphi : (p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)) \rightarrow \neg p_1$ *e* $\psi : \neg(p_0 \wedge p_1)$ *são logicamente equivalentes, pois*

$$\varphi \leftrightarrow \psi : ((p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)) \rightarrow \neg p_1) \leftrightarrow (\neg(p_0 \wedge p_1))$$

é uma tautologia.

p_0	p_1	$p_1 \vee p_0$	$p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$	$\neg p_1$	φ	$p_0 \wedge p_1$	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	1	1

Em seguida, listamos algumas das equivalências lógicas mais conhecidas e frequentemente utilizadas.

Para quaisquer fórmulas φ, ψ, σ do Cálculo Proposicional, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

- $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$
  $(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$ .... (associatividade)
- $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi, \quad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$ .... (comutatividade)
- $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$
  $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$ .... (leis de De Morgan)
- $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$ .... (dupla negação)
- $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\psi \to \neg\varphi$ .... (lei do contrarrecíproco)
- $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

- $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ .... (dupla implicação)
- $\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi, \quad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$ .... (idempotência)
- $\varphi \vee \bot \Leftrightarrow \varphi, \quad \varphi \wedge \neg\bot \Leftrightarrow \varphi$ .... (elemento neutro)
- $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$
  $\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$ .... (distributividade)

exemplo:

Usando uma sequência de equivalências lógicas, podemos mostrar que a fórmula

$$(p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1)),$$

é logicamente equivalente à fórmula p_0.

De facto,

$$\begin{aligned} (p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1)) &\Leftrightarrow p_0 \wedge (p_1 \vee \neg p_1) && [\textit{distributividade}] \\ &\Leftrightarrow p_0 && [\textit{elemento neutro}] \end{aligned}$$

Poderíamos, também, mostrar que a fórmula $(p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1))$ *é logicamente equivalente a* p_0 *provando que a fórmula* $((p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge (\neg p_1))) \leftrightarrow p_0$ *é uma tautologia.*

Dadas duas fórmulas φ e ψ, se $\varphi \to \psi$ for uma tautologia, escreveremos $\varphi \Rightarrow \psi$.

exemplo:

Dado que $p_0 \to (p_0 \lor p_1)$ *é uma tautologia, podemos escrever* $p_0 \Rightarrow (p_0 \lor p_1)$.

observação:

- $p_0 \to (p_0 \lor p_1)$ *é uma fórmula do Cálculo Proposicional, que representa múltiplas proposições (dependentes das proposições que fizermos representar por* p_0 *e* p_1*);*
- $p_0 \Rightarrow (p_0 \lor p_1)$ *é uma proposição, que diz que, sempre que* p_0 *representar uma proposição verdadeira,* $p_0 \lor p_1$ *também representa uma proposição verdadeira.*

Frases como x é um inteiro par ou $x + y = 2$ não são proposições, visto que os seus valores lógicos dependem dos valores atribuídos às variáveis x e de y.

No entanto, é frequente encontrarmos, no estudo de qualquer teoria matemática, frases que fazem referência a objetos genéricos representados por **variáveis**.

Frases como esta são objeto de estudo de um ramo da lógica denominado Cálculo de Predicados.

Nesta Unidade Curricular, não pretendemos aprofundar o estudo do Cálculo de Predicados, mas iremos estudar algumas noções elementares que permitem a familiarização com o simbolismo, o significado, o uso e a negação de frases quantificadas.

Em frases que envolvam variáveis, está implícito um domínio de discurso, designado por **universo** ou **domínio de variação** das variáveis.

exemplo:

Na frase x é um inteiro par, a variável x refere-se a um inteiro, pelo que o universo de x é o conjunto $\mathbb{Z}$.

A frase x é um inteiro par não é uma proposição. No entanto, se substituirmos x por valores do seu universo, obtemos frases às quais já é possível associar um valor de verdade. Por exemplo, 2 é um inteiro par e 3 é um inteiro par são proposições que assumem o valor lógico verdadeiro e falso, respetivamente.

Um **predicado na variável** x é uma frase declarativa que faz referência à variável x e cujo valor lógico depende da substituição desta variável por valores do seu domínio de variação, tornando-se numa proposição sempre que a variável é substituída por qualquer um desses valores.

Representamos um predicado nas variável x por uma letra minúscula p, q, r,... seguida da variável x colocada entre parêntesis.

Facilmente generalizamos estas ideias para predicados em várias variáveis, usando, para a representação, uma letra minúscula seguida das variáveis que ocorrem no predicado colocadas entre parêntesis e separadas por vírgulas.

exemplo:

Os predicados x é um inteiro par e *x é maior do que y podem ser representados, respetivamente, por $p(x)$ e por $q(x, y)$.*

Dado um predicado $p(x)$ na variável x, representamos por $p(a)$ a proposição obtida pela substituição da variável x pelo valor a (pertencente ao domínio de variação de x).

Usamos notação idêntica no caso de predicados em várias variáveis.

exemplo:

Considerando os predicados do exemplo anterior com universo $\mathbb{Z}$, $p(8)$ representa a proposição 8 é um inteiro par e $q(2,3)$ representa a proposição 2 é maior do que 3.

Os conetivos lógicos que definimos na sintaxe do Cálculo Proposicional Clássico estendem-se ao Cálculo de Predicados de um modo natural.

Assim, se $p(x)$ e $q(x)$ são predicados na variável x, então

$$\neg p(x), \qquad p(x) \wedge q(x),$$

$$p(x) \vee q(x), \qquad p(x) \rightarrow q(x)$$

$$\text{e} \qquad p(x) \leftrightarrow q(x)$$

são também predicados na variável x, e podemos, naturalmente, estender estas ideias para o caso de predicados em várias variáveis.

exemplo:

Sejam $p(x)$ o predicado x é um inteiro par e $q(x)$ o predicado x é um número primo. Então, $p(x) \wedge q(x)$ representa o predicado x é um inteiro par e é um número primo.

A substituição das variáveis de um predicado por valores concretos dos seus domínios de variação não é a única forma de obter uma proposição a partir de um predicado. Também o podemos fazer recorrendo aos chamados **quantificadores**.

Dado um predicado $p(x)$ na variável x, a frases como "Para todo o x, $p(x)$.", "Qualquer que seja o x, $p(x)$.", "Para cada x, $p(x)$.", dá-se a designação de **quantificação universal**.

Estas frases podem ser representadas por $\forall_x \ p(x)$.

Se o domínio de variação de x é U, então U será designado o **universo de quantificação** de x e podemos também escrever $\forall_{x \in U} \, p(x)$.

Ao símbolo $\forall$ chamamos **quantificador universal** e é usual associarmos-lhe uma das seguintes leituras: "todo", "para todo", "qualquer que seja" ou "para cada".

Se $p(x)$ é um predicado na variável x, a frase representada por $\forall_x\ p(x)$ é uma proposição.

A proposição $\forall_x\ p(x)$ é verdadeira se $p(a)$ for verdadeira para **todo** o elemento a do universo de quantificação de x.

exemplo:

Se $p(x)$ representar o predicado $x^2 \geq 0$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos reais, a proposição $\forall_x\ p(x)$ é verdadeira, uma vez que a afirmação em causa é verdadeira para qualquer real.

Se existir (pelo menos) um elemento b do domínio de variação de x para o qual $p(b)$ é uma proposição falsa, a proposição $\forall_x\ p(x)$ é falsa.

exemplo:

Se $q(x)$ representar o predicado $x^2 > 0$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos reais, a proposição $\forall_x\ q(x)$ é falsa, pois 0 é um número real e $q(0)$ é falsa.

Dado um predicado $p(x)$ na variável x, frases como "Existe um x tal que $p(x)$.", "Para algum x, $p(x)$." são designadas de **quantificação existencial**.

Estas frases podem ser representadas por $\exists_x\ p(x)$.

Se o domínio de variação de x é U, podemos também escrever $\exists_{x \in U}\ p(x)$.

Ao símbolo $\exists$ chamamos **quantificador existencial** e é usual associarmos-lhe uma das seguintes leituras: "existe" ou "para algum".

A proposição $\exists_x\ p(x)$ é verdadeira se $p(a)$ for verdadeira para **algum** elemento a do universo de quantificação de x.

Por outro lado, se **não existir qualquer** elemento b do universo de quantificação de x para o qual $p(b)$ seja verdadeira, a proposição $\exists_x\ p(x)$ é falsa.

exemplo:

Se $p(x)$ *representar o predicado* $x + 3 = 2$ *e se o universo de quantificação de* x *for o conjunto dos números inteiros, a proposição* $\exists_x\ p(x)$ *é verdadeira, pois* $-1 \in \mathbb{Z}$ *e* $p(-1)$ *é verdadeira.*

Por outro lado, se o universo de quantificação de x *for o conjunto dos números naturais, a proposição* $\exists_x\ p(x)$ *é falsa, uma vez que a equação não tem solução em* $\mathbb{N}$*.*

Se $p(x)$ é um predicado na variável x, a existência de um único objeto no universo que satisfaça o predicado $p(x)$ pode ser representada pela expressão $\exists^1_x\ p(x)$ ou, se o domínio de variação de x é U, $\exists^1_{x \in U}\ p(x)$, à qual é usual associar uma das leituras "Existe um e um só x (em U) tal que $p(x)$" ou "Existe um único x (em U) tal que $p(x)$".

exemplo:

A proposição $\exists^1_{x\in\mathbb{Z}}\ x + 3 = 2$ *é verdadeira, ao passo que* $\exists^1_{x\in\mathbb{Z}}\ x^2 - 1 = 0$ *é falsa (tanto* 1 *como* -1 *satisfazem o predicado* $x^2 - 1 = 0$*, contradizendo a unicidade de um objeto que o satisfaça).*

Quando consideramos predicados em várias variáveis, os quantificadores universal e existencial podem ser combinados.

exemplo:

Sejam $p(x, y)$ o predicado $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ e $q(x, y)$ o predicado $x + y = 0$.

Dados dois números reais quaisquer a e b, sabemos que $p(a, b)$ é verdadeira. Logo, a proposição $\forall_{x\in\mathbb{R}} \forall_{y\in\mathbb{R}}\ p(x, y)$ é verdadeira.

Todo o número inteiro admite um simétrico em $\mathbb{Z}$, pelo que a proposição $\forall_{x\in\mathbb{Z}} \exists_{y\in\mathbb{Z}}\ q(x, y)$ é verdadeira.

No entanto, a proposição $\forall_{x\in\mathbb{N}_0} \exists_{y\in\mathbb{N}_0}\ q(x, y)$ é falsa.

Quando temos um predicado em duas ou mais variáveis, o valor lógico da proposição obtida pela quantificação de todas as variáveis pode depender da ordem dessas quantificações.

exemplo:

Consideremos o predicado $x + y = 5$.

A proposição $\forall_{x\in\mathbb{Z}}\, \exists_{y\in\mathbb{Z}}\; x + y = 5$ é verdadeira.

A proposição $\exists_{y\in\mathbb{Z}}\, \forall_{x\in\mathbb{Z}}\; x + y = 5$ é falsa.

Referimos já que a proposição $\exists_x\ p(x)$ é falsa se não existe qualquer valor a do domínio de quantificação de x para o qual $p(a)$ seja verdadeira. Por outras palavras, $p(a)$ é falsa para todo o elemento a do domínio de quantificação de x.

Equivalentemente, podemos afirmar que $\neg p(a)$ é verdadeira para todo o elemento a do domínio de quantificação de x, isto é, a proposição $\forall_x\ (\neg p(x))$ é verdadeira.

Logo, $\neg(\exists_x\ p(x))$ é logicamente equivalente a $\forall_x\ (\neg p(x))$.

De modo análogo, concluímos que $\neg(\forall_x\ p(x))$ é logicamente equivalente a $\exists_x\ (\neg p(x))$.

exemplo:

Dizer que "nem todo o número inteiro é primo" é equivalente a dizer que "existe um número inteiro que não é primo";

e dizer que "não existe nenhum número divisível por zero" é equivalente a dizer que "qualquer que seja o número x, x não é divisível por zero".

A prova (demonstração) de uma proposição matemática é um argumento logicamente válido (construído com base em princípios - regras e axiomas) que estabelece a veracidade da proposição.

Para uma proposição ser aceite como verdadeira (teorema) tem de ser provada logicamente.

Consideremos a proposição "$2 = 1$" e a argumentação que se segue, que lhe conferiria o valor lógico verdadeiro.

exemplo:

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
a = b \quad &\Rightarrow \quad aa = ab \\
&\Rightarrow \quad a^2 = ab \\
&\Rightarrow \quad a^2 - b^2 = ab - b^2 \\
&\Rightarrow \quad (a+b)(a-b) = b(a-b) \\
&\Rightarrow \quad a + b = b \\
&\Rightarrow \quad b + b = b \\
&\Rightarrow \quad 2b = b \\
&\Rightarrow \quad 2 = 1
\end{aligned}$$

Sabemos que a proposição "$2 = 1$" é falsa, pelo que o argumento apresentado não pode ser válido.

Qual é a falácia do argumento?

Uma vez que estamos a assumir que $a = b$, facilmente concluímos que $a - b = 0$, pelo que não podemos aplicar a lei do corte no quinto passo da argumentação.

O argumento apresentado é, pois, incorreto.

A prova de uma proposição pode ser **direta** ou **indireta**.

Numa prova direta de uma proposição procura-se estabelecer a veracidade da mesma a partir de axiomas ou factos conhecidos e sem assumir pressupostos adicionais.

Porém, em certos casos, a prova direta não é simples e pode mesmo não ser possível. Nestas situações pode-se optar por um método de prova indireta. Por exemplo, pode-se provar a veracidade de uma proposição mostrando que esta não pode ser falsa.

Em geral, os enunciados dos teoremas podem ser interpretados como implicações.

exemplo:

"Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos." pode ser interpretado como a seguinte implicação:

Se a, b, c *forem os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo e* a *for o lado maior,* **então** $a^2 = b^2 + c^2$.

prova direta de uma implicação

Sejam p e q proposições. Para demonstrar $p \Rightarrow q$ (isto é que $p \rightarrow q$ é sempre verdade), podemos:

1. assumir que p é verdade;
2. usando p, contruir uma prova de q.

exemplo

proposição: *Se x e y são números reais positivos tais que $x < y$, então $x^2 < y^2$.*

demonstração: *Suponhamos que x e y são números reais positivos e que $x < y$.*

(nota 1: Isto não é, em geral, nem verdadeiro nem falso: depende dos valores de x e y; mas supomos que é verdadeiro.)

(nota 2: Queremos, agora, provar que $x^2 < y^2$.)

De $x < y$, multiplicando ambos os membros da desigualdade pelo número positivo x, concluímos que $x^2 < xy$.

Analogamente, multiplicando por y, vem que $xy < y^2$.

Logo, $x^2 < xy < y^2$.

Nem sempre é simples ou possível apresentar uma prova direta de uma implicação, optando-se por uma prova indireta como descrevemos de seguida.

Atendendo a que, para quaisquer fórmulas φ e ψ, as fórmulas $\varphi \to \psi$ e $\neg\psi \to \neg\varphi$ são logicamente equivalentes, a demonstração de um resultado do tipo $p \Rightarrow q$ pode ser feita, indiretamente, apresentando uma prova de $\neg q \Rightarrow \neg p$.

prova de uma implicação por contraposição ou por contrarrecíproco

Sejam p e q proposições. Para demonstrar $p \Rightarrow q$, podemos:

1. assumir que $\neg q$ é verdade;
2. usando $\neg q$, contruir uma prova de $\neg p$.

exemplo

proposição: *Se n é um natural tal que n^2 é ímpar, então n é ímpar.*

demonstração: *Iremos demonstrar este resultado por contraposição. Nesse sentido, suponhamos que n não é ímpar, ou seja, n é par.*

Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$n = 2k,$$

pelo que

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

Logo, n^2 é par.

Atendendo a que, para qualquer fórmula φ, $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, podemos ainda provar que uma proposição é verdadeira provando que a sua negação é falsa.

prova indireta por contradição ou redução ao absurdo

Para provar uma afirmação p, assume-se $\neg p$ e procura-se uma contradição.

No exemplo que se segue, apresenta-se uma demonstação do resultado enunciado recorrendo a uma prova por redução ao absurdo.

exemplo

proposição: *Existe uma infinidade de números primos.*

demonstração: *No sentido de provarmos por contradição este resultado, admitamos que existe um número finito de primos, digamos* $p_1, p_2, \ldots, p_n$*, com* $n \in \mathbb{N}$.

Considere-se, agora, o número

$$x = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

É óbvio que o número x *não é divisível por nenhum dos números primos* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *(pois o resto da divisão é sempre 1).*

Logo, x tem de ser divisível por algum número primo distinto de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, o que contradiz a hipótese inicial de que existem apenas n números primos.

Então a hipótese inicial está errada e, portanto, existe um número infinito de primos.

Uma vez que, para quaisquer fórmulas φ e ψ, a fórmula $\varphi \to \psi$ é logicamente equivalente a $\neg\varphi \vee \psi$, temos que $\neg(\varphi \to \psi)$ é logicamente equivalente a $\neg(\neg\varphi \vee \psi)$ e, por conseguinte, a $\varphi \wedge \neg\psi$. Atendendo a esta equivalência lógica, podemos aplicar o método da redução ao absurdo para provar uma implicação.

Sejam p e q proposições. Para provar $p \Rightarrow q$, podemos:

1. assumir que p é verdade;
2. assumir que $\neg q$ é verdade;
3. usando p e $\neg q$, chegar a uma contradição.

exemplo

proposição: *Se* $x \in \mathbb{R}$ *é tal que* $x + x = x$, *então* $x = 0$.

demonstração: *Iremos demonstrar este resultado por redução ao absurdo. Nesse sentido, suponhamos que* $x \in \mathbb{R}$ *é tal que* $x + x = x$ *e* $x \neq 0$, *e procuremos uma contradição.*

Ora, se $x + x = x$ *temos que* $2x = x$. *Sendo* $x \neq 0$, *podemos dividir ambos os membros por* x, *obtendo* $2 = 1$, *uma contradição.*