tópicos de matemática discreta

LEI

cláudia mendes araújo

departamento de matemática | universidade do minho

indução nos naturais

Os naturais do tipo

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \text{ com } n \in \mathbb{N}_0,$$

são chamados **números de Fermat**.

Baseando-se no facto de

$$F_0 = 3, \ F_1 = 5, \ F_2 = 17, \ F_3 = 257, \ F_4 = 65537$$

serem números primos, o matemático Pierre de Fermat [1601-1665] conjecturou, numa carta enviada em 1640 ao seu amigo Mersenne, que todos os números da forma F_n eram primos.

Em 1732, Leonhard Euler provou que a conjetura é falsa, mostrando que

$$F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

é um número composto.

Até hoje apenas são conhecidos 5 números de Fermat primos: precisamente os números F_0 a F_4 listados acima.

Consideremos a proposição

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ p(n)$$

onde $p(n)$ representa o predicado "F_n é um número primo".

Qual é, então, o valor lógico da proposição acima?

exemplo:

Consideremos a afirmação "Para qualquer natural n, $n^2 - n + 41$ *é primo".*

Atribuindo valores a n, podemos verificar a veracidade das proposições correspondentes obtidas a partir do predicado $q(n)$:"o número $n^2 - n + 41$ é primo".

n	1	2	3	4	5	6	...	40	41	...
$n^2 - n + 41$	41	43	47	53	61	71	...	1601	41^2	...

41 *é um número primo, pelo que* $q(1)$ *é verdadeira.*

43 *é um número primo, pelo que* $q(2)$ *é verdadeira.*

47 *é um número primo, pelo que* $q(3)$ *é verdadeira.*

53 *é um número primo, pelo que* $q(4)$ *é verdadeira.*

61 *é um número primo, pelo que* $q(5)$ *é verdadeira.*

71 *é um número primo, pelo que* $q(6)$ *é verdadeira.*

(...)

1601 *é um número primo, pelo que* $q(40)$ *é verdadeira.*

Poderemos, assim, concluir que $q(n)$ *é verdadeira para todo* $n \in \mathbb{N}$*?*

41^2 *não é um número primo, pelo que* $q(41)$ *é falsa!*

Consideremos a proposição

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \; q(n)$$

Qual é seu valor lógico?

Vimos que há, pelo menos, um valor de n *para o qual* $q(n)$ *é uma proposição falsa. Portanto, a proposição*

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \; q(n)$$

é falsa.

O objetivo deste capítulo é estudar proposições da forma

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\ p(n).$$

Ou seja, estaremos interessados em averiguar se uma determinada propriedade é ou não válida para todos os números naturais.

Para certificar que uma tal proposição é **falsa** "basta" indicar um natural que não verifique a propriedade.

Mostrar que uma proposição desse tipo é **verdadeira** é, em geral, mais difícil e requer o uso de um método de prova adequado:

> não basta verificar que a propriedade é satisfeita por uma parte (por maior que ela seja) dos números naturais;
>
> é preciso provar que todos os naturais sem exceção a verificam.

A definição indutiva de $\mathbb{N}$ através das seguintes regras

i | $1 \in \mathbb{N}$;

ii | se $n \in \mathbb{N}$, então $n + 1 \in \mathbb{N}$,

justifica a adoção do método de prova que iremos estudar. Comecemos por apresentar o conceito de predicado hereditário.

Um predicado $p(n)$, com $\mathbb{N}$ como universo de variação da variável n, diz-se **hereditário** quando, para todo $k \in \mathbb{N}$, se a proposição $p(k)$ é verdadeira, então a proposição $p(k + 1)$ é verdadeira.

exemplo:

1 | O predicado $p(n)$: "$2n$ é par" é hereditário. De facto, se $k \in \mathbb{N}$ é tal que $p(k)$ é verdadeira (i.e., $2k$ é par), então $p(k+1)$ também é verdadeira (pois $2(k+1) = 2k+2$ é par por ser a soma de 2 números pares).

2 | O predicado $s(n)$: "n é par" não é um predicado hereditário pois 2 é par e, por isso, é um natural k tal que $s(k)$ é verdadeira, mas 3 é ímpar, ou seja, $s(k+1)$ é falsa.

3 | O predicado $q(n)$: "$2n+1$ é par" é um predicado hereditário. Com efeito, se $k \in \mathbb{N}$ é tal que se $2k+1$ é par, então $2(k+1)+1 = 2k+2+1 = (2k+1)+2$ também é par (por ser a soma de 2 números pares).

4 | O predicado $r(n)$: "$n < 100$" não é hereditário pois 99 é um natural k tal que $r(k)$ é verdadeira mas $r(k+1)$ é falsa.

Consideremos os predicados em 1 | e 3 | do exemplo anterior. Ambos são hereditários, mas apenas um é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

É claro que $p(1)$ é uma proposição verdadeira pois $2 \times 1 = 2$ é par. A hereditariedade do predicado $p(n)$ permite-nos induzir que a propriedade é válida para todo o número natural.

Assim, a proposição

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \; p(n)$$

é verdadeira.

No entanto, a proposição

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\ q(n)$$

é falsa, já que, por exemplo, $q(1)$ é uma proposição falsa.

Conclui-se, assim, que, para que uma proposição da forma $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ p(n)$ seja verdadeira, **não é suficiente** que o predicado $p(n)$ seja hereditário.

É ainda necessário que $p(n)$ seja verdadeira para o valor inicial $\mathbf{1}$.

teorema [princípio de indução (simples) para $\mathbb{N}$]

Seja $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$. Se

1 | $p(1)$ é verdadeira e

2 | $p(n)$ é hereditário, ou seja, para todo $k \in \mathbb{N}$, se $p(k)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

demonstração Admitamos que as condições 1 | e 2 | são satisfeitas para o predicado $p(n)$ e mostremos que, para qualquer natural n, $p(n)$ é verdadeira. Nesse sentido, consideremos o conjunto X dos números naturais que não satisfazem $p(n)$, ou seja,

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \neg p(n)\}.$$

Suponhamos, no intuito de uma redução ao absurdo, que $X \neq \emptyset$. Seja m o menor número natural que pertence a X. Por 1 |, $1 \notin X$ e, portanto, $m > 1$. Logo, $m = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Uma vez que m é o menor natural que pertence a X, sabemos que $m - 1 = (k + 1) - 1 = k$ não pertence a X, isto é, k satisfaz o predicado $p(n)$. Ora, por 2 |, $p(n)$ é hereditário e, portanto, $k + 1$ satisfaz o predicado $p(n)$, ou seja, m satisfaz $p(n)$, o que contradiz o facto de m pertencer a X. Logo, X tem de ser vazio e, assim, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

A condição 1 | do teorema anterior é designada por **base de indução** e a condição 2 | por **passo de indução**.

Na aplicação da condição 2 |, chamamos **hipótese de indução** a "$p(k)$ é verdadeira".

Dado um predicado $p(n)$ sobre $\mathbb{N}$, uma aplicação deste princípio para provar que a proposição

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \; p(n)$$

é verdadeira diz-se uma **prova por indução nos naturais**.

exemplo:

Mostremos que $n^3 - n$ é divisível por 3, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$n^3 - n$ é divisível por 3".

i | base de indução | Para $n = 1$, temos $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$.

Como 0 é divisível por 3, $p(1)$ é verdadeira.

ii | passo de indução | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja, $k^3 - k$ é divisível por 3.

Então, existe $q \in \mathbb{N}_0$ tal que $k^3 - k = 3q$.

Assim,

$$\begin{aligned}(k+1)^3-(k+1) &= (k^3+3k^2+3k+1)-(k+1)\\ &= k^3+3k^2+3k-k\\ &= (k^3-k)+(3k^2+3k)\\ &= 3q+(3k^2+3k)\\ &= 3(q+k^2+k).\end{aligned}$$

Logo, $(k+1)^3-(k+1)=3(q+k^2+k)$, pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por i | e ii |, podemos concluir que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ n^3-n \text{ é divisível por } 3.$$

exemplo:

Mostremos que a soma dos n primeiros números naturais ímpares é igual a n^2, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $q(n)$ o predicado

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

i | base de indução | Para $n = 1$, temos

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2 \times 1 - 1 = 1 = 1^2,$$

pelo que $q(1)$ é verdadeira.

ii | passo de indução | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $q(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= \left(\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\right) + (2(k+1)-1) \\
&= k^2 + (2k+1) \\
&= k^2 + 2k + 1 \\
&= (k+1)^2,
\end{aligned}$$

pelo que $q(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por i | e ii |, podemos concluir que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

exemplo:

Mostremos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^n \geq 1+\frac{n}{3},$$

pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $h(n)$ o predicado "$\left(1+\frac{1}{3}\right)^n \geq 1+\frac{n}{3}$".

i | base de indução | Para $n = 1$, temos

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^n = \left(1+\frac{1}{3}\right)^1 = 1+\frac{1}{3} \geq 1+\frac{1}{3} = 1+\frac{n}{3},$$

pelo que $h(1)$ é verdadeira.

ii | passo de indução | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $h(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^k \geq 1+\frac{k}{3}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left(1+\tfrac{1}{3}\right)^{(k+1)} &= \left(1+\tfrac{1}{3}\right)^k \left(1+\tfrac{1}{3}\right) \\
&\geq \left(1+\tfrac{k}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right) \\
&= 1+\tfrac{k}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{k}{9} \\
&= 1+\tfrac{k+1}{3}+\tfrac{k}{9} \geq 1+\tfrac{k+1}{3}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^{(k+1)} \geq 1+\frac{k+1}{3},$$

pelo que $h(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por i $|$ e ii $|$, podemos concluir que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\left(1+\frac{1}{3}\right)^n \geq 1+\frac{n}{3}$.

Como já referimos, é necessário que se verifiquem simultaneamente a base e o passo de indução para que se possa induzir a validade da propriedade em causa para todo o número natural.

Consideremos o predicado $p(n)$: "$n^2 > 2n + 1$".

Facilmente se verifica que $p(1)$ é falsa: $1^2 = 1 \not> 3 = 2 \times 1 + 1$.

No entanto, o passo de indução verifica-se, ou seja, o predicado $p(n)$ é hereditário. De facto, dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $k^2 > 2k + 1$,

$$
\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
&= k^2 + (2k+1) \\
&> (2k+1) + (2k+1) \\
&= 2k + 2 + 2k \\
&> 2k + 2 + 1 \\
&= 2(k+1) + 1.
\end{aligned}
$$

Na verdade, $p(n)$ é válida para todos os naturais maiores ou iguais a 3.

A prova deste resultado pode ser feita recorrendo a uma variante do Princípio de Indução, considerando para base de indução o elemento de $\mathbb{N}$ a partir do qual se pode provar a validade da propriedade

teorema [princípio de indução (simples) para $\mathbb{N}$ de base n_0]

Sejam $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Se

1 | $p(n_0)$ é verdadeira e

2 | para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$, se $p(k)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$.

exemplo:

Verifiquemos, então, que para todo $n \geq 3, n^2 > 2n + 1$.

i | base de indução | Para $n = 3$, temos $n^2 = 3^2 = 9 > 7 = 2 \times 3 + 1$, pelo que $p(3)$ é verdadeira.

ii | passo de indução | Mostrámos há pouco que $p(n)$ é hereditário. Assim, dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 3$, $p(k+1)$ é verdadeira sempre que $p(k)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ de base 3 e por i | e ii |, podemos concluir que para todo $n \geq 3, n^2 > 2n + 1$.

exemplo:

Mostremos que para todo $n \geq 5$, $2^n > n^2$, pelo método de indução para $\mathbb{N}$ de base 5.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$2^n > n^2$".

i | base de indução | Para $n = 5$, temos $2^n = 2^5 = 32 > 25 = 5^2$, pelo que $p(5)$ é verdadeira.

ii | passo de indução | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 5$ e $p(k)$ é verdadeira, ou seja, $2^k > k^2$. Então,

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \times 2^k \\ &> 2 \times k^2 \\ &= k^2 + k^2 \\ &> k^2 + 2k + 1 \qquad \text{(pelo exemplo anterior)} \\ &= (k+1)^2, \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ de base 5 e por i | e ii |, podemos concluir que para todo $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

Na prova de certas propriedades sobre os naturais, a aplicação do Princípio de Indução Simples não é fácil. Nestes casos, torna-se mais conveniente optar por um outro método de prova, o chamado **Princípio de Indução Completa** (ou **Princípio de Indução Forte**).

teorema [princípio de indução completa para $\mathbb{N}$]

Seja $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$. Se

1 | $p(1)$ é verdadeira e

2 | para todo $k \in \mathbb{N}$, se, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$, $p(j)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Este princípio parece ser mais geral do que o Princípio de Indução Simples, mas prova-se serem equivalentes: toda a prova que possa ser feita pelo Princípio de Indução Simples pode ser feita pelo Princípio de Indução Completa e vice-versa.

À semelhança do que acontece com o Princípio de Indução Simples, podemos enunciar o **Princípio de Indução Completa de base n_0**.

teorema [princípio de indução completa para $\mathbb{N}$ de base n_0]

Sejam $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Se

1 | $p(n_0)$ é verdadeira e

2 | para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$, se, para todo $j \in \{n_0, \ldots, k\}$, $p(j)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$.

exemplo:

Recorrendo ao Princípio de Indução Completa de base 2, mostremos que todo o número natural diferente de 1 é primo ou é um produto de números primos.

Representemos por $p(n)$ o predicado "n é primo ou n é um produto de primos.".

i | base de indução | 2 é primo e, portanto, $p(2)$ é verdadeira.

ii | passo de indução | Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$ e admitamos que $p(j)$ é verdadeira para todo $j \in \{2, \ldots, k\}$.

Se $k+1$ é primo, então $p(k+1)$ é verdadeira.

Se $k+1$ não é primo, então existem $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $1 < a, b < k+1$ e $k+1 = ab$.

Por hipótese de indução, como $a, b \in \{2, \ldots, k\}$, sabemos que a é primo ou um produto de primos e b é primo ou um produto de primos.

Logo, $k + 1 = ab$ é um produto de primos, pelo que $p(k + 1)$ é verdadeira.

Por 1 | e 2 | e pelo Princípio de Indução Completa de base 2, mostrámos que todo o número natural diferente de 1 é primo ou é um produto de primos.