tópicos de matemática discreta

LEI

cláudia mendes araújo

departamento de matemática | universidade do minho

teoria elementar de conjuntos

A noção de conjunto é uma noção fundamental na Matemática. O estudo de conjuntos (designado por **Teoria de Conjuntos**) foi introduzido por Georg Cantor, nos finais do século XIX. A teoria de Cantor, um tanto intuitiva, foi posteriormente tratada de uma forma axiomática.

A Teoria de Conjuntos revela-se, hoje, essencial não só em muitos campos da matemática, mas também noutras áreas como as ciências da computação.

Nesta unidade curricular, iremos considerar a noção de conjunto como um conceito primitivo, ou seja, como uma noção intuitiva, a partir da qual serão definidas outras noções.

Intuitivamente, um **conjunto** é uma coleção de objetos, designados **elementos** ou **membros** do conjunto.

exemplo:

São exemplos de conjuntos as coleções de:

i | *unidades curriculares do primeiro ano do plano de estudos de LEI;*

ii | *pessoas presentes numa festa;*

iii | *estações do ano;*

iv | *todos os números naturais.*

Representamos os conjuntos por letras maiúsculas A, B, C, ..., X, Y, Z, eventualmente com índices.

Os elementos de um conjunto são habitualmente representados por letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, z, também eventualmente com índices.

Sejam A um conjunto e x um objeto.

Dizemos que x **pertence a** A, e escrevemos $x \in A$, se x é um dos objetos de A.

Caso x não seja um dos objetos de A, dizemos que x **não pertence a** A e escrevemos $x \notin A$.

exemplo:

Sejam A o conjunto de todos os números primos inferiores a 50 e B o conjunto de todas as soluções da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Temos, por exemplo, que $3 \in A$ e $1 \in B$.

Por outro lado, $1 \notin A$ e $3 \notin B$.

Um conjunto pode ser descrito de diversas formas.

definição de um conjunto por extensão

Podemos descrever um conjunto enumerando explicitamente os seus elementos, colocando-os entre chavetas e separados por vírgulas.

Neste caso, dizemos que o conjunto é descrito **por extensão**.

exemplo:

Se A é o conjunto de todos os números primos inferiores a 50 e B o conjunto de todas as soluções da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$, então A e B podem ser descritos por extensão do seguinte modo:

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$;

$B = \{-4, 1\}$.

Numa descrição por extensão, nem sempre é possível ou praticável a enumeração de todos os elementos. Nesse caso, utiliza-se uma notação sugestiva e não ambígua que permita intuir os elementos não expressos.

exemplo:

O conjunto dos números naturais é usualmente representado por extensão utilizando a seguinte notação:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

O conjunto dos números inteiros pode ser escrito por extensão recorrendo à seguinte notação:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

definição de um conjunto por compreensão

Podemos descrever um conjunto indicando um predicado $p(x)$, com domínio de variação U para a variável x, tal que os valores possíveis a em U para os quais $p(a)$ é verdadeira são exatamente os elementos do conjunto em causa.

Neste caso, dizemos que o conjunto é descrito **por compreensão**.

exemplo:

O conjunto dos números naturais menores do que 5 pode ser descrito, por extensão, por $\{1, 2, 3, 4\}$*.*

Em alternativa, podemos definir esse conjunto por compreensão como se segue:

$$\{n \in \mathbb{N} : n < 5\}.$$

exercício:

Seja $X = \{-2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$. *Indique os elementos de cada um dos seguintes conjuntos:*

i | $\{x \in X : x \in \mathbb{N}\}$;

ii | $\{x \in X : |x| < 2\}$;

iii | $\{x \in X : \sqrt{x} \in X\}$;

iv | $\{x \in X : x^2 \in X\}$;

v | $\{x^2 : x \in X\}$.

Ao único conjunto que não tem qualquer elemento chamamos **conjunto vazio**, e representamo-lo por $\varnothing$ ou por $\{\}$.

O conjunto vazio pode ser descrito por compreensão, recorrendo a um predicado que não possa ser satisfeito. Por exemplo,

$$\varnothing = \{n \in \mathbb{N} : n^2 = 28\}$$

ou

$$\varnothing = \{x : x \neq x\}.$$

Dois conjuntos A e B dizem-se **iguais**, e escreve-se $A = B$, se têm os mesmos elementos, ou seja, se

$$\forall x \ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

é uma proposição verdadeira.

Se existir um elemento num dos conjuntos que não pertence ao outro, então A e B dizem-se **diferentes**.

exemplo:

1 | O conjunto de todos os divisores naturais de 4 é igual ao conjunto $A = \{1, 2, 4\}$ *e também é igual ao conjunto* $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0\}$.

2 | Os conjuntos $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é múltiplo de } 3\}$ *e* $D = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$ *são diferentes, pois* $3 \in C$ *e* $3 \notin D$.

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A **está contido em** B ou que A **é um subconjunto de** B, e escreve-se $A \subseteq B$, se todo o elemento de A é também elemento de B, ou seja, se

$$\forall_x \ (x \in A \rightarrow x \in B)$$

é uma proposição verdadeira.

Se existir um elemento de A que não é elemento de B, ou seja, se $\exists_{x \in A} \ x \notin B$ é uma proposição verdadeira, diz-se que A **não está contido em** B ou que A **não é um subconjunto de** B, e escreve-se $A \not\subseteq B$.

exemplo:

1 | $\{-1, 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, *uma vez que tanto -1 como 1 são soluções da equação.*

2 | $\{0, -1, 1\} \not\subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, *uma vez que 0 não é solução da equação.*

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A **está propriamente contido em** B ou que A **é um subconjunto próprio de** B, e escreve-se $A \subsetneq B$ ou $A \subset B$, se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, ou seja, se

$$\forall_x \; (x \in A \rightarrow x \in B) \quad \wedge \quad \exists_{x \in B} \; x \notin A$$

é uma proposição verdadeira.

exemplo:

$\{-1, 1\} \subsetneq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, *uma vez que, para além de 1 e -1, 2 também é solução da equação.*

proposição:

Sejam A, B e C conjuntos. Então,

1 | $\varnothing \subseteq A$;

2 | $A \subseteq A$;

3 | Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$;

4 | $A = B$ se e só se $(A \subseteq B$ e $B \subseteq A)$.

demonstração

1 | Mostremos, por redução ao absurdo, que $\varnothing \subseteq A$. Nesse sentido, assumamos que $\varnothing \not\subseteq A$. Então, existe um elemento de $\varnothing$ que não pertence a A. Ora, $\varnothing$ não tem elementos. Esta contradição resultou de supormos que $\varnothing \not\subseteq A$. Logo, $\varnothing \subseteq A$.

2 | Dado um elemento arbitrário a de A, é claro que $a \in A$. Logo, $\forall_x \ (x \in A \rightarrow x \in A)$ é uma proposição verdadeira, ou seja, $A \subseteq A$.

3 | Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, ou seja,

$$(*)\ \forall_x\ (x \in A \to x \in B) \qquad \text{e} \qquad (**)\ \forall_x\ (x \in B \to x \in C)$$

são proposições verdadeiras.

Pretendemos mostrar que $A \subseteq C$, isto é, $\forall_x\ (x \in A \to x \in C)$ é uma proposição verdadeira. Seja $x \in A$. Por $(*)$, podemos concluir que $x \in B$. Logo, de $(**)$, vem que $x \in C$. Assim, todo o elemento de A é elemento de C, ou seja, $A \subseteq C$.

4 | Pretendemos mostrar a veracidade da equivalência $A = B$ se e só se ($A \subseteq B$ e $B \subseteq A$). Iremos fazê-lo provando as duas implicações.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $A = B$. Então,

$$\forall_x \ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

é uma proposição verdadeira, ou, equivalentemente,

$$\forall_x \ ((x \in A \to x \in B) \land (x \in B \to x \in A))$$

é verdadeira.

Logo,

$$\forall_x \ (x \in A \to x \in B)$$

e

$$\forall_x \ (x \in B \to x \in A)$$

são proposições verdadeiras. Portanto, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Então, todo o elemento de A é elemento de B e todo o elemento de B é elemento de A. Por outras palavras, A e B têm exatamente os mesmos elementos, ou seja, $A = B$. $\square$

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X (dito o **universo**). O conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B chama-se **união** ou **reunião de** A **com** B, e representa-se por $A \cup B$, ou seja,

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}.$$

exemplo:

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{3, 4, 5\}$. *Então,* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2 | Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Então,* $C \cup D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par } \vee n \leq 10\}$.

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X. O conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B chama-se **interseção de A com B**, e representa-se por $A \cap B$, ou seja,

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}.$$

exemplo:

1 | *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{3, 4, 5\}$. *Então,* $A \cap B = \{3\}$.

2 | *Sejam* $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Então,* $C \cap D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X. O conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B chama-se **complementar de** B **em** A, e representa-se por $A \setminus B$, ou seja,

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

O complementar de B em A também se designa por **diferença de** A **com** B e pode, também, representar-se por $A - B$.

Quando A é o universo X, o conjunto $A \setminus B = X \setminus B$ diz-se o **complementar de** B e representa-se por $\overline{B}$ ou B'.

exemplo:

1 | *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{3, 4, 5\}$. *Então,* $A \setminus B = \{1, 2\}$.

2 | *Sejam* $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Então,* $C \setminus D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par } \wedge n > 10\}\}$ *e* $\mathbb{N} \setminus D = \{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$.

3 | *Dados os subconjuntos* $E = \{-2, 0, 2, \pi, 7\}$ *e* $F =]-\infty, 3]$ *de* $\mathbb{R}$, *temos:*

i | $E \cup F =]-\infty, 3] \cup \{\pi, 7\}$;

ii | $E \cap F = \{-2, 0, 2\}$;

iii | $E \setminus F = \{\pi, 7\}$;

iv | $\overline{E \cup F} = [3, \pi[\cup]\pi, 7[\cup]7, +\infty[$.

Na proposição que se segue, apresentam-se algumas propriedades relativas à união de conjuntos.

proposição:

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,

1 | $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$;

2 | $A \cup \varnothing = A$;

3 | $A \cup A = A$;

4 | $A \cup X = X$;

5 | $A \cup B = B \cup A$;

6 | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

7 | se $A \subseteq B$ então $A \cup B = B$.

demonstração

Iremos demonstrar as propriedades 1, 2, 4, 6 e 7. As restantes ficam como exercício.

1 | Mostremos que $A \subseteq A \cup B$, ou seja, que

$$\forall_x \ (x \in A \rightarrow x \in A \cup B)$$

é uma proposição verdadeira.

Seja $x \in A$. Temos que

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B. \end{aligned}$$

Logo, $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ e, portanto, $A \subseteq A \cup B$.

A prova de $B \subseteq A \cup B$ é análoga.

2 | Mostremos que $A \cup \varnothing = A$. Da propriedade 1, vem que $A \subseteq A \cup \varnothing$. Resta, pois, provar que $A \cup \varnothing \subseteq A$.

Seja $x \in A \cup \varnothing$. Temos

$$\begin{aligned} x \in A \cup \varnothing &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in \varnothing \\ &\Rightarrow x \in A, \quad \text{uma vez que } x \in \varnothing \text{ é falsa.} \end{aligned}$$

Assim,

$$x \in A \cup \varnothing \Rightarrow x \in A.$$

Por outras palavras, $A \cup \varnothing \subseteq A$.

Assim, $A \cup \varnothing = A$.

4 | Provemos agora que $A \cup X = X$. Da propriedade 1, vem que $X \subseteq A \cup X$. Basta mostrar que $A \cup X \subseteq X$.

Seja $x \in A \cup X$. Temos

$$\begin{aligned} x \in A \cup X &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in X \\ &\Rightarrow x \in X \vee x \in X \quad (\text{uma vez que } A \subseteq X) \\ &\Leftrightarrow x \in X. \end{aligned}$$

Logo, $x \in A \cup X \Rightarrow x \in X$, donde $A \cup X \subseteq X$ e, assim, $A \cup X = X$

6 | Mostremos que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Por definição de união de conjuntos,

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C &\Leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C. \end{aligned}$$

Uma vez que é válida a propriedade associativa para a disjunção, temos que

$$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C).$$

Novamente pela definição de união de conjuntos, temos

$$\begin{aligned} x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C). \end{aligned}$$

Logo, $x \in (A \cup B) \cup C$ se e só se $x \in A \cup (B \cup C)$, pelo que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

7 | Admitamos que $A \subseteq B$ e mostremos que $A \cup B = B$. Da propriedade 1, vem que $B \subseteq A \cup B$. Falta, pois, provar que $A \cup B \subseteq B$.

Seja $x \in A \cup B$. Temos

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \\ &\Rightarrow x \in B \vee x \in B \quad \text{(uma vez que } A \subseteq B\text{)} \\ &\Leftrightarrow x \in B. \end{aligned}$$

Assim, $x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$.

Logo, $A \cup B \subseteq B$, pelo que $A \cup B = B$. $\square$

Em seguida, apresentamos algumas propriedades relativas à interseção de conjuntos.

proposição:

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,

1 | $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$;

2 | $A \cap \varnothing = \varnothing$;

3 | $A \cap A = A$;

4 | $A \cap X = A$;

5 | $A \cap B = B \cap A$;

6 | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

7 | se $A \subseteq B$ então $A \cap B = A$.

demonstração

Iremos demonstrar as propriedades 1, 2 e 7. As restantes ficam como exercício.

1 | Mostremos que $A \cap B \subseteq A$, ou seja, que

$$\forall_x \ (x \in A \cap B \rightarrow x \in A)$$

é verdadeira.

Seja $x \in A \cap B$. Temos que

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \\ &\Rightarrow x \in A. \end{aligned}$$

Logo, $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e, portanto, $A \cap B \subseteq A$.

A prova de $A \cap B \subseteq B$ é análoga.

2 | Mostremos que $A \cap \varnothing = \varnothing$. Façamo-lo por redução ao absurdo, admitindo que $A \cap \varnothing \neq \varnothing$.

Então, existe um objeto x tal que $x \in A \cap \varnothing$.

Temos que

$$\begin{aligned} x \in A \cap \varnothing &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \varnothing \\ &\Rightarrow x \in \varnothing. \end{aligned}$$

Mas $\varnothing$ não tem elementos, pelo que temos um absurdo, que resultou de supormos que $A \cap \varnothing \neq \varnothing$.

Assim, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

7 | Admitamos que $A \subseteq B$ e mostremos que $A \cap B = A$. Da propriedade 1, vem que $A \cap B \subseteq A$. Falta, pois, provar que $A \subseteq A \cap B$.

Seja $x \in A$. Como $A \subseteq B$, podemos concluir que $x \in B$.

Logo, temos que a proposição $x \in A \wedge x \in B$ é verdadeira. Vimos, portanto, que $x \in A \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B)$, ou seja, $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$.

Assim, $A \subseteq A \cap B$. $\square$

Vejamos algumas propriedades relacionadas com a complementação.

proposição

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,

1 | $A \cap \overline{A} = \varnothing$ e $A \cup \overline{A} = X$;

2 | $A \setminus \varnothing = A$ e $A \setminus X = \varnothing$;

3 | se $A \subseteq B$, então $A \setminus B = \varnothing$;

4 | $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

5 | $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

6 | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

7 | $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

8 | $\overline{(\overline{A})} = A$.

demonstração Iremos provar as propriedades 1, 2 e 5. As restantes ficam como exercício.

1 | Comecemos por mostrar que $A \cap \overline{A} = \varnothing$ por redução ao absurdo. Suponhamos, pois, que existe $x \in A \cap \overline{A}$.

Temos que

$$\begin{aligned} x \in A \cap \overline{A} &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \overline{A} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in X \wedge x \notin A) \quad \text{(por definição de complementar de um conjunto)} \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin A, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, que resultou de supormos que $A \cap \overline{A} \neq \varnothing$. Portanto, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Verifiquemos, agora, que $A \cup \overline{A} = X$.

Seja $x \in A \cup \overline{A}$. Como A e $\overline{A}$ são subconjuntos de X, os elementos de cada um desses conjuntos são, ainda, elementos de X. Assim,

$$\begin{aligned} x \in A \cup \overline{A} &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in \overline{A} \\ &\Rightarrow x \in X \vee x \in X \\ &\Leftrightarrow x \in X. \end{aligned}$$

Mostrámos que $x \in A \cup \overline{A} \Rightarrow x \in X$. Podemos, pois, concluir que $A \cup \overline{A} \subseteq X$.

Resta mostrar que $X \subseteq A \cup \overline{A}$. Nesse sentido, tomemos $x \in X$.

É claro que a proposição $x \in A \vee x \notin A$ é verdadeira. Ora, se $x \in X$ e $x \notin A$, então $x \in \overline{A}$.

Logo,

$$x \in X \Rightarrow (x \in A \vee x \in \overline{A}),$$

ou seja,

$$x \in X \Rightarrow x \in A \cup \overline{A}.$$

Portanto, $X \subseteq A \cup \overline{A}$ e a igualdade pretendida segue.

2 | Comecemos por mostrar que $A \setminus \varnothing = A$.

Por definição, $A \setminus \varnothing$ é o conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a $\varnothing$. Ora, nenhum elemento pertence a $\varnothing$.

Logo, $A \setminus \varnothing$ é o conjunto de todos os elementos de A, ou seja, $A \setminus \varnothing = A$.

No sentido de provar, por redução ao absurdo, que $A \setminus X = \varnothing$, admitamos que existe $x \in A \setminus X$. Temos que

$$\begin{aligned} x \in A \setminus X &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin X \\ &\Rightarrow x \in X \wedge x \notin X, \quad \text{(porque } A \text{ é subconjunto de } X\text{)} \end{aligned}$$

o que é uma contradição, que resultou de supormos que $A \setminus X \neq \varnothing$.

Assim, $A \setminus X = \varnothing$.

5 | Pretendemos mostrar que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Precisamos, pois, de mostrar que, para todo x, $x \in A \setminus (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ é uma proposição verdadeira.

Ora, pelas leis de De Morgan e pela propriedade distributiva da operação lógica $\wedge$ em relação à operação $\vee$, temos que

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \setminus C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)
\end{aligned}$$

Logo, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. $\square$

observação Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ subconjuntos de um conjunto X. Tendo em conta que as operações de união e de interseção de conjuntos gozam da propriedade associativa, podemos escrever sem ambiguidade

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

e

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

A união dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é usualmente notada por $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e a interseção por $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Assim,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \big\{x \in X : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\big\}$$

e

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \big\{x \in X : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\big\}.$$

Vejamos, agora, outros processos para construir conjuntos a partir de conjuntos dados.

Seja A um conjunto. Chamamos **conjunto das partes de** A ou **conjunto potência de** A, que representamos por $\mathcal{P}(A)$, ao conjunto de todos os subconjuntos de A, ou seja,

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

exemplo:

Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, \{2\}\}$ e $D = \varnothing$. Então,

1 | $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

2 | $\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

3 | $\mathcal{P}(C) = \{\varnothing, \{1\}, \{\{2\}\}, \{1, \{2\}\}\}$

4 | $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$

proposição

Sejam A e B dois conjuntos. Então,

1 | $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ e $A \in \mathcal{P}(A)$;

2 | se $A \subseteq B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$;

3 | se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

demonstração

1 | Para qualquer conjunto A, temos que $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq A$, pelo que $\varnothing$ e A são elementos de $\mathcal{P}(A)$.

2 | Suponhamos que $A \subseteq B$. Pretendemos mostrar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, ou seja, que é verdadeira a proposição

$$\forall X \ (X \in \mathcal{P}(A) \rightarrow X \in \mathcal{P}(B)).$$

Seja $X \in \mathcal{P}(A)$. Então, $X \subseteq A$.

Como $X \subseteq A$ e $A \subseteq B$, podemos concluir que $X \subseteq B$.

Logo, $X \in \mathcal{P}(B)$ e, portanto, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

3 | consultar bibliografia adequada.

Dados dois objetos a e b, os conjuntos $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ são iguais, uma vez que têm exatamente os mesmos elementos. A ordem pela qual são listados os elementos não interessa.

Em certas situações, interessa considerar os objetos por determinada ordem. Para tal, recorremos ao conceito de par ordenado.

Dados dois objetos a e b, o **par ordenado de a e de b** será denotado por (a, b). Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) dizem-se **iguais**, escrevendo-se $(a, b) = (c, d)$, quando $a = c$ e $b = d$.

Note-se que, dados dois objetos a e b, se $a \neq b$, então $(a, b) \neq (b, a)$.

Num par ordenado (a, b), o objeto a é designado por **primeira coordenada** (ou **primeira componente**) e o objeto b é designado por **segunda coordenada** (ou **segunda componente**).

Os pares ordenados permitem-nos formar novos conjuntos a partir de conjuntos dados.

Sejam A e B conjuntos. O conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$ diz-se o **produto cartesiano de A por B** e representa-se por $A \times B$. Ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

exemplo:

1 | Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Então,

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

É claro que $A \times B \neq B \times A$.

2 | Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$. Então,

$$C \times D = \{(2n, 2m + 1) : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

3 | Sejam $E = F = \mathbb{R}$. Os elementos de $E \times F = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ podem ser representados geometricamente como pontos de um plano munido de um eixo de coordenadas.

A noção de produto cartesiano de dois conjuntos generaliza-se de forma natural:

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos ($n \geq 2$). O *produto cartesiano de* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, notado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, é o conjunto dos n–úplos ordenados $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ em que $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, ou seja,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\big\}.$$

Se $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, escrevemos A^n em alternativa a $A \times A \times \ldots \times A$.

observação

Dois n–úplos ordenados $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ são iguais se e somente se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$ e $\ldots$ e $a_n = b_n$.

exemplo:

Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{7\}$. Temos que

$$A \times B \times C = \big\{(4,1,7),(4,2,7),(4,3,7),(5,1,7),(5,2,7),(5,3,7)\big\}$$

e

$$A^2 = \big\{(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\big\}.$$

Vejamos algumas propriedades relacionadas com o produto cartesiano.

proposição

Sejam A, B, C e D conjuntos. Então,

1 | $A \times \varnothing = \varnothing = \varnothing \times A$;

2 | sendo os conjuntos não vazios, $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ se e só se $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$;

3a | $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$;

3b | $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

4a | $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$;

4b | $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

5a | $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$;

5b | $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

demonstração

2 | Admitamos que todos os conjuntos são não vazios. Pretendemos mostrar que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ se e só se $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ e procuremos provar que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Então, por definição de produto cartesiano, $(a, b) \in A \times B$.

Por hipótese, todo o elemento de $A \times B$ é elemento de $C \times D$. Portanto, $(a, b) \in C \times D$, pelo que $a \in C$ e $b \in D$.

Provámos, assim, que

$$a \in A \Rightarrow a \in C \quad \text{e} \quad b \in B \Rightarrow b \in D,$$

donde $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.

$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, admitamos que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$ e mostremos que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$.

Seja $(a, b) \in A \times B$. Então, por definição de produto cartesiano, $a \in A$ e $b \in B$.

Por hipótese, todo o elemento de A é elemento de C e todo o elemento de B é elemento de D.

Logo, $a \in C$ e $b \in D$ e, portanto, $(a, b) \in C \times D$. Assim, é verdadeira a proposição

$$\forall_{a,b} \; ((a, b) \in A \times B \to (a, b) \in C \times D)$$

e, portanto, $(A \times B) \subseteq (C \times D)$.

5a | Pretendemos mostrar que $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$.

Dado um par ordenado (x, y),

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in (C \times A) \setminus (C \times B) &\Leftrightarrow (x, y) \in C \times A \wedge (x, y) \notin C \times B \\
&\Leftrightarrow (x \in C \wedge y \in A) \wedge (x \notin C \vee y \notin B) \\
&\Leftrightarrow ((x \in C \wedge y \in A) \wedge x \notin C) \vee \\
&\vee ((x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B) \\
&\Leftrightarrow (x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B \\
&\Leftrightarrow x \in C \wedge (y \in A \wedge y \notin B) \\
&\Leftrightarrow x \in C \wedge y \in (A \setminus B) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in C \times (A \setminus B).
\end{aligned}
$$

A demonstração das restantes propriedades fica ao cuidado dos alunos. $\square$

observação Se os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ têm $p_1, p_2, \ldots, p_n$ elementos, respetivamente, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ tem $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ elementos.

Um conjunto cujos elementos são conjuntos é chamado uma **família de conjuntos**.

exemplo:

São famílias de conjuntos:

1 | $\mathcal{P}(A)$, o conjunto das partes de um conjunto A;

2 | $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \{X : X$ é um subconjunto finito de $\mathbb{N}\}$;

3 | $\{\{0, 2, 4, 6, 8\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{4, 7\}, \varnothing\}$;

4 | $\{\mathbb{Z}^-, \{0\}, \mathbb{Z}^+\}$.

A definição seguinte generaliza as noções de união e interseção de conjuntos, já estudadas.

Seja $\mathcal{F}$ uma família não vazia de conjuntos.

A **união da família** $\mathcal{F}$ é o conjunto

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x : \exists_{F \in \mathcal{F}}\ x \in F\}$$

formado pelos objetos que pertencem a pelo menos um dos membros de $\mathcal{F}$.

A **interseção da família** $\mathcal{F}$ é o conjunto

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x : \forall_{F \in \mathcal{F}}\ x \in F\}$$

formado pelos objetos que pertencem a todos os membros de $\mathcal{F}$.

exemplo:

1 | $\bigcup \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ e $\bigcap \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \varnothing$.

2 | Para $\mathcal{F} = \{\{1, x, y, z\}, \{1, 2, 3, z\}, \{a, 1\}\}$, tem-se

$$\bigcup \mathcal{F} = \{1, x, y, z\} \cup \{1, 2, 3, z\} \cup \{a, 1\} = \{x, y, z, 1, 2, 3, a\},$$

$$\bigcap \mathcal{F} = \{1, x, y, z\} \cap \{1, 2, 3, z\} \cap \{a, 1\} = \{1\}.$$

exemplo:

Consideremos as seguintes famílias de conjuntos:

$$\mathcal{A} = \{\mathbb{Z}^-, \{0\}, \mathbb{Z}^+\};$$
$$\mathcal{B} = \{\{\varnothing, 0, \{1\}, 2, \{3\}, 4\}, \{\varnothing, 1, 2, 3, \{4\}\}, \{\varnothing, 2, 4\}\};$$
$\mathcal{C} = \{I_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,
$$I_n = \{x \in \mathbb{R} : -n \leq x \leq n\} = [-n, n].$$

Temos que:

$$\bigcup \mathcal{A} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z}, \qquad \bigcap \mathcal{A} = \mathbb{Z}^- \cap \{0\} \cap \mathbb{Z}^+ = \varnothing;$$
$$\bigcup \mathcal{B} = \{\varnothing, 0, \{1\}, 2, \{3\}, 4\} \cup \{\varnothing, 1, 2, 3, \{4\}\} \cup \{\varnothing, 2, 4\}$$
$$= \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{4\}, 0, 1, 2, 3, 4\},$$
$$\bigcap \mathcal{B} = \{\varnothing, 0, \{1\}, 2, \{3\}, 4\} \cap \{\varnothing, 1, 2, 3, \{4\}\} \cap \{\varnothing, 2, 4\} = \{\varnothing, 2\};$$
$$\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} I_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} [-n, n] = \mathbb{R},$$
$$\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} I_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} [-n, n] = \{0\}.$$

Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos. Diz-se que $\mathcal{F}$ é constituída por **conjuntos disjuntos dois a dois** se a interseção de dois quaisquer elementos distintos de $\mathcal{F}$ é o conjunto vazio, ou seja, e verdadeira a proposição

$$\forall_{X,Y\in\mathcal{F}}\ (X \neq Y \to X \cap Y = \varnothing).$$

exemplo:

1 | A família $\{\{0,2,4,6\},\{8\},\{1,3,5\},\{7,9,11,13\},\{10,12\}\}$ é constituída por conjuntos disjuntos dois a dois.

2 | Os conjuntos da família $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ não são disjuntos dois a dois.

Seja A um conjunto. Uma **partição de** A é um conjunto Π de subconjuntos não vazios de A, disjuntos dois a dois e cuja união é A. Ou seja, uma família de conjuntos Π é uma partição de A quando são verdadeiras as seguintes proposições

i | $\forall_{X \in \Pi} \, (X \subseteq A \wedge X \neq \varnothing)$;

ii | $\forall_{X,Y \in \Pi} \, (X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \varnothing)$;

iii | $\bigcup \Pi = A$.

Os elementos de Π são chamados **blocos da partição** Π.

exemplo:

1 | O conjunto $\{\mathbb{Z}^-, \{0\}, \mathbb{Z}^+\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

2 | Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Então

$$\Pi_1 = \{\{1, 5\}, \{3, 9\}, \{7\}\}$$

$$\Pi_2 = \{\{1, 3, 5\}, \{7, 9\}\}$$

$$\Pi_3 = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{9\}\}$$

são partições de A;

$$\Pi_4 = \{\{1, 3, 5\}, \{9\}\}$$

$$\Pi_5 = \{\{1, 5, 7, 9\}, \{3, 5\}\}$$

$$\Pi_6 = \{\{1, 3\}, \{5, 7\}, \varnothing, \{9\}\}$$

não são partições de A.