tópicos de matemática discreta

LEI

cláudia mendes araújo

departamento de matemática | universidade do minho

relações binárias

A noção de relação entre dois objetos baseia-se na ideia de que esses dois objetos estão associados de alguma forma. Uma relação binária será, então, um conjunto de pares ordenados e os seus elementos serão os pares ordenados (a, b) tais que a está associado a b.

Dados dois conjuntos A e B, chamamos **relação binária de** A **em** B (ou **correspondência de** A **para** B) a qualquer subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$.

Os conjuntos A e B dizem-se, respetivamente, o **conjunto de partida** e o **conjunto de chegada** de R. Quando $A = B$, dizemos simplesmente que R é uma relação binária em A.

Se $(a, b) \in R$, então dizemos que a **está relacionado com** b **por R** e escrevemos $a \, R \, b$.

Se $(a, b) \notin R$, escrevemos $a \not R \, b$ e dizemos que a **não está relacionado com** b **por R**.

exemplo:

1 | Sejam $A = \{0, 2, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Então

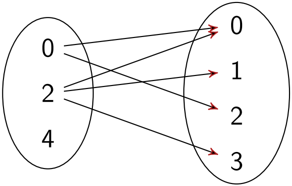
$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(0,1)\},\\
R_2 &= \{(0,1),(0,2),(2,2),(4,1)\},\\
R_3 &= \{(0,0),(0,2),(2,0),(2,1),(2,3)\}
\end{aligned}
$$

são relações binárias de A em B, enquanto que

$$S = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

não o é pois $S \not\subseteq A \times B$. A correspondência R_3, por exemplo, pode ser descrita pelo seguinte diagrama

$$A \xrightarrow{R_3} B$$



2 | Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 9, 10\}$, e seja R a relação de A em B definida por

$$a\,R\,b \quad \text{se e só se} \quad a|b \text{ (ou seja, } a \text{ divide } b\text{).}$$

Então

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 9), (1, 10), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 10), (3, 6), (3, 9)\}.$$

Note-se que

$2 \not R\, 9$ pois $2 \not| 9$, embora $(2, 9) \in A \times B$;

$5 \not R\, 10$ pois $(5, 10) \notin A \times B$, embora $5|10$.

3 | Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{1,3,4,8,9\}$. Então, $R = \{(1,1),(2,4),(3,9)\}$ é uma relação binária de A em B que pode ser definida por

$$a\,R\,b \quad \text{se e só se} \quad b = a^2 \quad (a \in A, b \in B).$$

4 | Seja $A = \{1,2,3\}$. Então

$$\emptyset, \quad \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,2)\}, \quad \{(1,2),(3,3)\}, \quad A^2$$

são relações em A.

5 | $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : y = 2x\}$ é uma relação em $\mathbb{Z}$. Por exemplo,

$$\begin{array}{lll} (0,0) \in R, & (1,2) \in R, & (4,8) \in R, \\ (-2,-4) \in R, & (2,3) \notin R, & (8,4) \notin R. \end{array}$$

Dados dois conjuntos A e B, o conjunto de todas as relações binárias de A em B é o conjunto $\mathcal{P}(A \times B)$.

Se os conjuntos A e B forem finitos e tiverem n e m elementos, respetivamente, então $A \times B$ tem $n \times m$ elementos, pelo que $\mathcal{P}(A \times B)$ tem $2^{n \times m}$ elementos. Assim, **existem** $2^{n \times m}$ **relações binárias de** A **em** B.

Os conjuntos $\varnothing$ e $A \times B$ são relações binárias de A em B, designadas, respetivamente, por **relação vazia** e **relação universal**.

Seja A um conjunto não vazio. Então,

$$\mathrm{id}_A = \{(a,a) : a \in A\} \text{ e } \omega_A = A^2 = \{(x,y) : x,y \in A\}$$

são relações binárias em A. A id_A chamamos **relação identidade em** A e a ω_A chamamos **relação universal em** A.

Sejam A, B conjuntos e R uma relação binária de A em B. Chamamos **domínio de** R ao conjunto

$$\mathrm{Dom}(R) = \{a \in A \mid \exists_{b \in B}\ (a,b) \in R\}.$$

Chamamos **imagem** ou **contradomínio de** R ao conjunto

$$\mathrm{Im}(R) = \{b \in B \mid \exists_{a \in A}\ (a,b) \in R\}.$$

exemplo:

1 | Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e a relação R de A em B definida por $(a, b) \in R$ se e só se $a < b$. Então,

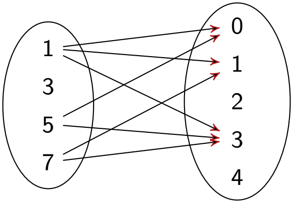
i. $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$;

ii. $\mathrm{Dom}(R) = \{2, 4\}$;

iii. $\mathrm{Im}(R) = \{3, 4, 5\}$.

2 | Seja $R = \{(1,0),(1,1),(1,3),(5,0),(5,3),(7,1),(7,3)\}$ a relação do conjunto $A = \{1,3,5,7\}$ no conjunto $B = \{0,1,2,3,4\}$, ilustrada pelo seguinte diagrama

$$A \xrightarrow{R} B$$



Então,

$$\mathrm{Dom}(R) = \{1,5,7\},$$

$$\mathrm{Im}(R) = \{0,1,3\}.$$

3 | Seja R a relação binária em $\mathbb{Z}$ definida por

$$a\,R\,b \quad \text{se e só se} \quad |a| = 2b.$$

Temos $\mathrm{Dom}(R) = \{a \in \mathbb{Z} : a \text{ é par}\}$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathbb{N}_0$.

Duas relações binárias R e S de um conjunto A num conjunto B são iguais quando os conjuntos R e S são iguais. Em particular, $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(S)$. Note-se, no entanto, que não é necessariamente verdade que $R = S$ sempre que $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(S)$.

exemplo:

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Seja R a relação de A em B definida por $(a, b) \in R$ se e só se $a < b$ e seja $S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$. Então,

i. $\mathrm{Dom}(R) = \{2, 4\} = \mathrm{Dom}(S)$;

ii. $\mathrm{Im}(R) = \{3, 4, 5\} = \mathrm{Im}(S)$;

iii. $(2, 5) \in R$ mas $(2, 5) \notin S$, pelo que $R \neq S$.

Dados conjuntos A e B, uma relação binária R de A em B diz-se:

total quando $\mathrm{Dom}(R) = A$;

unívoca quando é verdadeira a proposição

$$\forall_{a\in A}\forall_{b_1,b_2\in B}\ ((a\,R\,b_1 \wedge a\,R\,b_2) \rightarrow b_1 = b_2);$$

uma **função** ou **aplicação** quando R é uma relação total e unívoca.

observação:

Escreve-se $f : A \rightarrow B$ para indicar que f é uma função de A em B.

Se f é uma função de A em B então, para cada $a \in A$, escreve-se $f(a) = b$, onde b é o único elemento de B tal que $(a, b) \in f$, e diz-se que b **é a imagem de** a **por** f ou que b **é o valor que a função** f **assume em** a.

De seguida, estudamos alguns processos que permitem obter novas relações a partir de relações dadas.

Como uma relação binária é um conjunto, podemos considerar, em particular, os processos estudados anteriormente para obter novos conjuntos a partir de conjuntos dados. Assim, se R e S são relações binárias de A em B, o mesmo acontece com $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, pois cada um destes conjuntos é ainda um subconjunto de $A \times B$.

exemplo:

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e as relações $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ e $S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$. Então,

i. $R \cup S = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ é uma relação binária de A em B;

ii. $R \cap S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$ é uma relação binária de A em B;

iii. $R \setminus S = \{(2, 5)\}$ é uma relação binária de A em B.

Além destes processos para obter novas relações, existem outros que são específicos das relações.

Sejam A, B conjuntos e R uma relação binária de A em B. Chama-se **relação inversa de** R, e representa-se por R^{-1}, a relação de B em A definida por

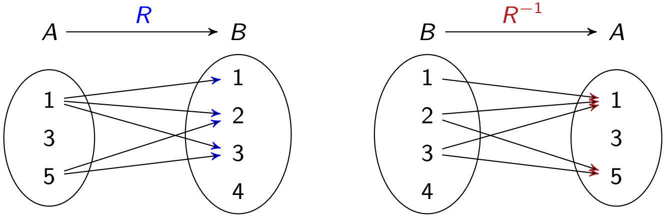
$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}.$$

exemplo:

1 | Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e a relação R de A em B definida por $(a, b) \in R$ se e só se $a < b$. Uma vez que $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$, tem-se

$$R^{-1} = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2), (5, 4)\}.$$

2 | Consideremos os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. A relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (5, 2), (5, 3)\}$ de A em B tem como inversa a relação $R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 5), (3, 5)\}$ de B em A.



3 | A relação $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\}$ em $\mathbb{N}$ tem como inversa a relação em $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \{(y, x) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\} \\ &= \{(y, x) \in \mathbb{N}^2 : y \geq x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \geq y\}. \end{aligned}$$

Sejam A, B conjuntos e R e S relações binárias de A em B. Então,

1 | $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$ e $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$.

2 | $(R^{-1})^{-1} = R$.

3 | Se $R \subseteq S$, então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

Sejam A, B, C, D conjuntos, R uma relação binária de A em B e S uma relação binária de C em D. Chama-se **relação composta de** S **com** R, e representa-se por $S \circ R$, a relação binária de A em D definida por

$$S \circ R = \{(x, y) \in A \times D \mid \exists_{z \in B \cap C} \ \ ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S)\}.$$

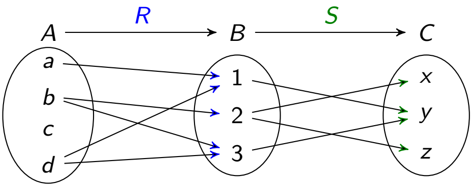
É de notar que, nas condições da definição anterior, se $B \cap C = \varnothing$, então $S \circ R = \varnothing$.

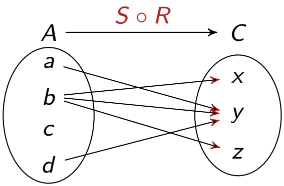
exemplo:

1 | Sejam $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{x, y, z\}$. Dadas as relações $R = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3), (d, 1), (d, 3)\}$, de A em B, e $S = \{(1, y), (2, x), (2, z), (3, y)\}$, de B em C, temos que

$$S \circ R = \{(a, y), (b, x), (b, y), (b, z), (d, y)\}$$

é uma relação binária de A em C.



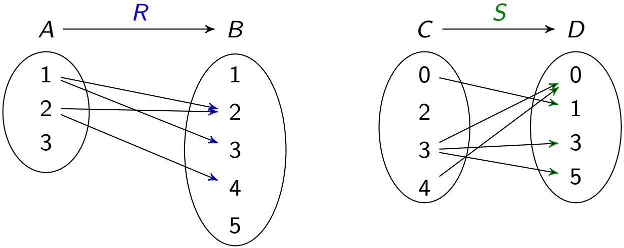


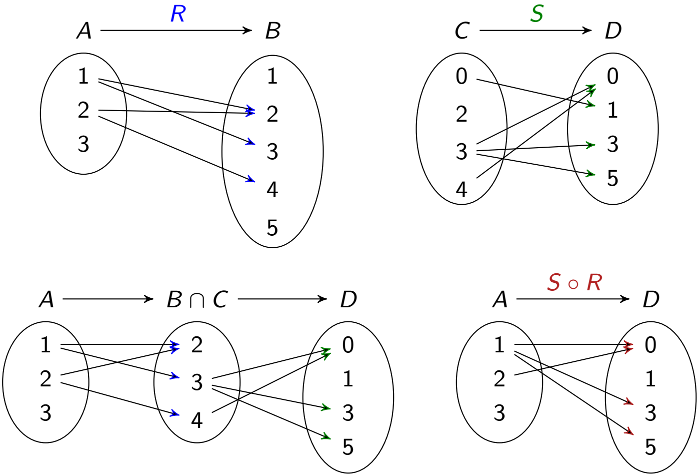
2 | Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, $C = \{0,2,3,4\}$ e $D = \{0,1,3,5\}$. Consideremos as relações binárias

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,4)\} \subseteq A \times B$$

e

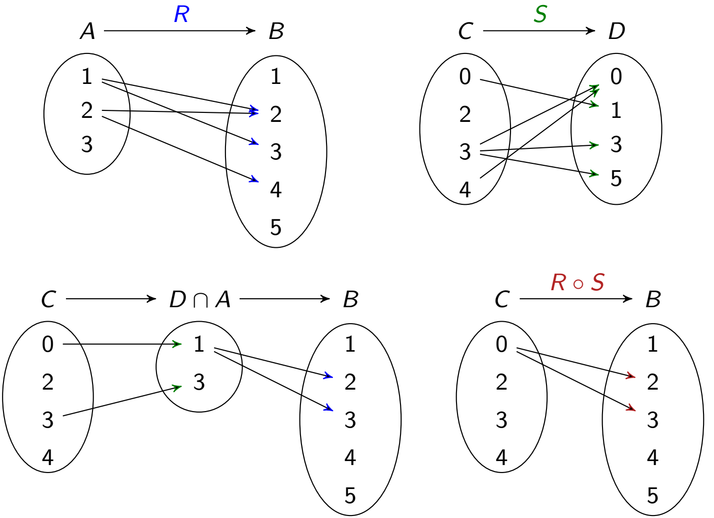
$$S = \{(0,1),(3,0),(3,3),(3,5),(4,0)\} \subseteq C \times D.$$





Tem-se $S \circ R = \{(1,0),(1,3),(1,5),(2,0)\}$.

relações binárias



Além disso, $R \circ S = \{(0, 2), (0, 3)\}$.

Atendendo ao exemplo anterior, podemos concluir que a composição de relações binárias não é necessariamente comutativa.

Sejam R, S e T relações binárias onde $R \subseteq A \times B$. Então,

1 | $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$ e $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

2 | $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

3 | $R \circ \mathrm{id}_A = R = \mathrm{id}_B \circ R$.

4 | $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

demonstração:

1 | Comecemos por mostrar que $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$.

Dado $x \in \mathrm{Dom}(S \circ R)$, existe y tal que $(x, y) \in S \circ R$. Por definição de relação composta, $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in S$ para algum z.

Em particular, $(x, z) \in R$, pelo que $x \in \mathrm{Dom}(R)$.

De forma semelhante prova-se que $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

2 | Seja $(x, y) \in (T \circ S) \circ R$. Então, $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in T \circ S$ para algum z.

De $(z, y) \in T \circ S$ segue que $(z, w) \in S$ e $(w, y) \in T$ para algum w.

Ora, como $(x, z) \in R$ e $(z, w) \in S$, temos que $(x, w) \in S \circ R$.

Assim, $(x, w) \in S \circ R$ e $(w, y) \in T$, pelo que $(x, y) \in T \circ (S \circ R)$. Logo, $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$.

De modo análogo prova-se que $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$.

3 | exercício

4 | Para todo o objeto (x, y),

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in (S \circ R)^{-1} & \Leftrightarrow (y, x) \in S \circ R \\
& \Leftrightarrow \exists_z \ ((y, z) \in R \wedge (z, x) \in S) \\
& \Leftrightarrow \exists_z \ ((z, y) \in R^{-1} \wedge (x, z) \in S^{-1}) \\
& \Leftrightarrow \exists_z \ ((x, z) \in S^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1}) \\
& \Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \circ S^{-1}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Em seguida, referimos certas propriedades que permitem caraterizar algumas classes especiais de relações binárias.

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Dizemos que

1 | R é **reflexiva** quando a proposição $\forall_{a \in A}\, (a, a) \in R$ é verdadeira;

2 | R é **simétrica** quando a proposição $\forall_{a,b \in A}\, ((a, b) \in R \to (b, a) \in R)$ é verdadeira;

3 | R é **antissimétrica** quando a proposição $\forall_{a,b \in A}\, (((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \to a = b)$ é verdadeira;

4 | R é **transitiva** quando a proposição $\forall_{a,b,c \in A}\, (((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \to (a, c) \in R)$ é verdadeira.

Note-se que uma relação binária R em A é antissimétrica se e só se

$$\forall_{a,b \in A}\, (((a, b) \in R \wedge a \neq b) \to (b, a) \notin R)$$

é uma proposição verdadeira.

exemplo:

Seja A um conjunto.

1 | A relação id_A é reflexiva, simétrica, transitiva e antissimétrica em A.

2 | A relação ω_A é reflexiva, simétrica e transitiva em A. Esta relação é antissimétrica se e só se A tem no máximo um elemento.

3 | A relação $\varnothing$ é simétrica, transitiva e antissimétrica em A. Esta relação é reflexiva se e só se $A = \varnothing$.

4 | Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(4,4)\}$, então:

i. uma vez que $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in R$, a relação R é reflexiva;

ii. o par $(1,2)$ é elemento de R, mas $(2,1) \notin R$, pelo que R não é simétrica;

iii. como não existem elementos distintos $a, b \in A$ tais que $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$, podemos afirmar que a relação R é antissimétrica;

iv. R é transitiva, visto que

$$
\begin{array}{c}
((1,1) \in R \wedge (1,1) \in R) \Rightarrow (1,1) \in R \\
((1,1) \in R \wedge (1,2) \in R) \Rightarrow (1,2) \in R \\
((1,1) \in R \wedge (1,3) \in R) \Rightarrow (1,3) \in R \\
((1,2) \in R \wedge (2,2) \in R) \Rightarrow (1,2) \in R \\
((1,2) \in R \wedge (2,3) \in R) \Rightarrow (1,3) \in R \\
((1,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \Rightarrow (1,3) \in R \\
((2,2) \in R \wedge (2,2) \in R) \Rightarrow (2,2) \in R \\
((2,2) \in R \wedge (2,3) \in R) \Rightarrow (2,3) \in R \\
((2,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \Rightarrow (2,3) \in R \\
((3,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \Rightarrow (3,3) \in R \\
((4,4) \in R \wedge (4,4) \in R) \Rightarrow (4,4) \in R
\end{array}
$$

e o antecedente da implicação $((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \rightarrow (a,c) \in R$ é falso para as restantes combinações de valores para a, b e c.

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Então

1 | R é reflexiva se e só se $id_A \subseteq R$;

2 | R é simétrica se e só se $R^{-1} = R$;

3 | R é transitiva se e só se $R \circ R \subseteq R$;

4 | R é antissimétrica se e só se $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$.

demonstração | exercício.

Seja A um conjunto. Uma relação binária R diz-se uma **relação de equivalência em** A quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

exemplo:

1 | Dado um conjunto A não vazio, as relações id_A e ω_A são relações de equivalência em A.

2 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e
$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$. Então,

i. R é reflexiva uma vez que
$$\mathrm{id}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} \subseteq R;$$

ii. R é simétrica pois
$$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\} = R;$$

iii. R é transitiva porque
$$R \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\} \subseteq R.$$

Por i.-iii., R é uma relação de equivalência em A.

3 | Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. A relação binária definida em A por

$$x \, R_f \, y \quad \text{se e só se} \quad f(x) = f(y)$$

é uma relação de equivalência em A. De facto,

i. R_f é reflexiva: para todo $x \in A$, $f(x) = f(x)$;

ii. R_f é simétrica: para quaisquer $x, y \in A$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x);$$

iii. R_f é transitiva: para quaisquer $x, y, z \in A$,

$$(f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)) \Rightarrow f(x) = f(z).$$

4 | Seja R a relação binária em $\mathbb{Z}$ definida por

$$a \, R \, b \quad \text{se e só se} \quad a - b \quad \text{é divisível por 3.}$$

Facilmente verificamos que R é uma relação de equivalência. Com efeito,

i. para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0$ é divisível por 3, pelo que $a \, R \, a$. Portanto, R é reflexiva;

ii. para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a \, R \, b$, então $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, pelo que $b - a = -(a - b) = -(3k) = 3(-k)$, com $-k \in \mathbb{Z}$. Logo, $b \, R \, a$ e, assim, R é simétrica;

iii. para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a \, R \, b$ e $b \, R \, c$, então $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e $b - c = 3k'$, para algum $k' \in \mathbb{Z}$. Logo, $a - c = (a - b) + (b - c) = 3(k + k')$, com $k + k' \in \mathbb{Z}$, pelo que $a \, R \, c$. Logo, R é transitiva.

Notemos que, dado $a \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} 1\, R\, a \quad & \text{se e só se} \;\; 1 - a = 3k, \;\; \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \\ & \text{se e só se} \;\; a = 3k + 1, \;\; \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \\ & \text{se e só se} \;\; a \text{ tem resto 1 na divisão inteira por 3.} \end{aligned}$$

De modo análogo se prova que $2\, R\, a$ se e só se a tem resto 2 na divisão inteira por 3 e $0\, R\, a$ se e só se a tem resto 0 na divisão inteira por 3.

Assim, uma vez que 0, 1, 2 são os únicos restos possíveis na divisão inteira por 3 e R é uma relação de equivalência, os elementos de $\mathbb{Z}$ podem ser agrupados nos seguintes três subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} X_0 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 0\, R\, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\; a = 3k\} \\ X_1 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 1\, R\, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\; a = 3k + 1\} \\ X_2 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 2\, R\, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\; a = 3k + 2\} \end{aligned}$$

Sejam R uma relação de equivalência num conjunto A e $x \in A$. Chama-se **classe de equivalência de** x **módulo** R ou, caso não haja ambiguidade, **classe de equivalência de** x, ao conjunto

$$[x]_R = \{y \in A \mid x\,R\,y\}.$$

Ao conjunto de todas as classes de equivalência dos elementos de A chamamos **conjunto quociente de** A **módulo** R e representamo-lo por A/R, ou seja,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}.$$

exemplo:

1 | Consideremos a relação de equivalência R definida no exemplo anterior. Então,

$$\begin{aligned}
[0]_R &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 0\, R\, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k\} \\
[1]_R &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 1\, R\, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k+1\} \\
[2]_R &= \{a \in \mathbb{Z} \mid 2\, R\, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k+2\}
\end{aligned}$$

e $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$.

2 | Seja $A \neq \varnothing$. Consideremos a relação de equivalência id_A. Para $x \in A$, temos que

$$[x]_{\mathrm{id}_A} = \{y \in A \mid y \, \mathrm{id}_A \, x\} = \{y \in A \mid y = x\} = \{x\}$$

e, portanto,

$$A/\mathrm{id}_A = \{\{x\} \mid x \in A\}.$$

3 | Seja $A \neq \varnothing$. Consideremos a relação de equivalência ω_A. Para $x \in A$, temos que

$$[x]_{\omega_A} = \{y \in A \mid y \, \omega_A \, x\} = A,$$

pelo que

$$A/\omega_A = \{A\}.$$

4 | Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Consideremos a relação de equivalência $R = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1), (3,3), (4,4)\}$. Então,

$$[1]_R = \{1, 2\} = [2]_R, \quad [3]_R = \{3\}, \quad [4]_R = \{4\}.$$

Assim, $A/R = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$.

exemplo:

Consideremos de novo as relações referidas no exemplo anterior e os respetivos conjuntos quociente.

1 | O conjunto quociente $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$, onde R é a relação de equivalência definida por $a\,R\,b$ se e só se $a - b$ é divisível por 3, é uma partição de $\mathbb{Z}$.

2 | Dado $A \neq \varnothing$, temos que $A/\mathrm{id}_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$. É claro que A/id_A é uma partição de A.

3 | Dado $A \neq \varnothing$, temos que $A/\omega_A = \{A\}$ e $\{A\}$ é uma partição de A.

4 | Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $R = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3),(4,4)\}$, então $A/R = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$. Facilmente se verifica que A/R é uma partição de $A = \{1,2,3,4\}$.

A cada relação de equivalência definida num conjunto A está associada uma partição de A.

Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então, A/R é uma partição de A.

O recíproco do resultado anterior também é válido, ou seja, cada partição de um conjunto define uma relação de equivalência nesse conjunto.

Sejam A um conjunto, Π uma partição de A e $\mathcal{R}_\Pi$ a relação binária em A definida por

$$x \, \mathcal{R}_\Pi \, y \quad \text{se e só se} \quad \text{existe } X \in \Pi \text{ tal que } x, y \in X.$$

Então, $\mathcal{R}_\Pi$ é uma relação de equivalência em A.

exemplo:

1 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$ uma partição de A. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Pi = \quad & \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), \\ & (4,4), (6,6), (4,6), (6,4), (5,5)\}. \end{aligned}$$

2 | Sejam $A = \mathbb{Z}$ e $\Pi = \{X_0, X_1, X_2\}$, onde

$$X_0 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad X_1 = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad X_2 = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Então,

$$x \, \mathcal{R}_\Pi \, y \quad \text{se e só se} \quad x - y \text{ é divisível por } 3.$$

observação:

Sejam A um conjunto, R uma relação de equivalência em A e Π uma partição de A. Então,

1 | A/R é uma partição de A e

$$\mathcal{R}_{A/R} = R.$$

2 | $\mathcal{R}_{\Pi}$ é uma relação de equivalência em A e

$$A/(\mathcal{R}_{\Pi}) = \Pi.$$

Seja A um conjunto. Uma relação binária R diz-se uma **relação de ordem parcial em** A quando R é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Neste caso, ao par (A, R) dá-se a designação de **conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.)**.

exemplo:

São exemplos de c.p.o.'s os seguintes pares:

1 | (A, id_A), onde A é um conjunto e $\mathrm{id}_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

2 | $(\mathbb{N}, \leq)$, onde $\leq$ é a relação "menor ou igual" usual em $\mathbb{N}$ (para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \leq x$, logo $\leq$ é reflexiva; para todos $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ e, portanto, $\leq$ é antissimétrica; para todos $x, y, z \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$, pelo que $\leq$ é transitiva).

3 | $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação "divide" em $\mathbb{N}$.

4 | $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde A é um conjunto qualquer e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual.

Se não houver ambiguidade, representamos uma ordem parcial num conjunto A por $\leq$ e o respetivo c.p.o. por $(A, \leq)$.

notação

Dado um c.p.o. $(A, \leq)$ e dados $a, b \in A$, escrevemos

$a \leq b$ e lemos "a é menor ou igual a b" ou "a precede b" para representar $(a, b) \in \leq$;

$a \not\leq b$ e lemos "a não é menor ou igual a b" se $(a, b) \notin \leq$;

$a < b$ e lemos "a é menor do que b" ou "a precede propriamente b" se $a \leq b$ e $a \neq b$;

$a << b$ e lemos "b é sucessor de a" ou "a é sucedido por b" ou "b cobre a" ou "a é coberto por b" se $a < b$ e $\neg(\exists_{c \in A}\ (a < c \wedge c < b))$.

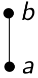
Dado um c.p.o. $(A, \leq)$ e dados $a, b \in A$, dizemos que a, b são **comparáveis** quando $a \leq b$ ou $b \leq a$. Por outro lado, quando $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$, dizemos que a e b são **incomparáveis** e escrevemos $a||b$.

Um c.p.o. $(A, \leq)$, em que A é um conjunto finito não vazio, pode ser representado por meio de um **diagrama de Hasse**, como se descreve em seguida.

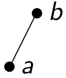
1 | cada elemento $a \in A$ é representado por um ponto do plano:

$\bullet a$

2 | se a e b são dois elementos de A tais que $a \leq b$, representa-se b acima de a; além disso, se $a << b$ unem-se estes dois pontos por um segmento de reta.



ou

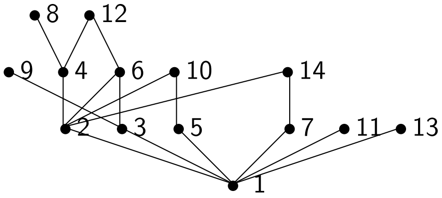


exemplo:

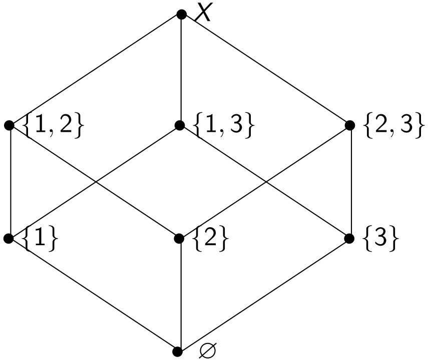
1 | Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ e $|$ a ordem parcial definida por

$$x|y \quad \leftrightarrow \quad \exists_{k\in\mathbb{N}}\ y = kx.$$

O c.p.o. $(A, |)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



2 | Seja $X = \{1, 2, 3\}$. O c.p.o. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse que se segue.



Dados um c.p.o. $(A, \leq)$ e X um suconjunto de A, podem existir elementos com propriedades especiais relativamente a X.

Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o., X um subconjunto de A e $m \in A$. Dizemos que m é:

1 | um **elemento maximal de** X quando $m \in X$ e não existe $x \in X$ tal que $m < x$;

2 | um **elemento minimal de** X quando $m \in X$ e não existe $x \in X$ tal que $x < m$;

3 | **majorante de** X quando $x \leq m$, para todo $x \in X$;

4 | **minorante de** X quando $m \leq x$, para todo $x \in X$;

5 | **supremo de** X quando m é majorante de X e $m \leq m'$, para qualquer m' majorante de X;

6 | **ínfimo de** X quando m é minorante de X e $m' \leq m$, para qualquer m' minorante de X;

7 | **máximo de** X quando m é majorante de X e $m \in X$;

8 | **mínimo de** X quando m é minorante de X e $m \in X$.

O conjunto dos majorantes de X e o conjunto dos minorantes de X são representados por $\mathrm{Maj}(X)$ e $\mathrm{Min}(X)$, respetivamente.

Caso exista, o supremo (resp.: ínfimo, máximo, mínimo) de um subconjunto X de A é único e representa-se por $\sup(X)$ (resp.: $\inf(X)$, $\max(X)$, $\min(X)$).

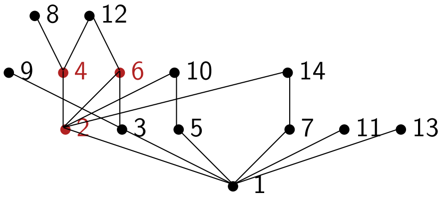
Note-se que, em particular, A tem um máximo se existir $m \in A$ tal que $x \leq m$, para todo $x \in A$; A tem elemento mínimo se existir $m \in A$ tal que $m \leq x$, para todo $x \in A$.

exemplo:

Consideremos, de novo, o c.p.o. $(A, |)$, onde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.

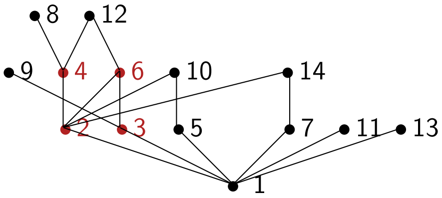
Os elementos maximais de A são o 8, o 9, o 10, o 11, o 12, o 13 e o 14; 1 é o único elemento minimal de A. Além disso,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Min}(A) = \{1\}, & \mathrm{Maj}(A) = \varnothing, & \inf(A) = 1, \\ \min(A) = 1, & \sup(A) \text{ não existe}, & \max(A) \text{ não existe.} \end{array}$$



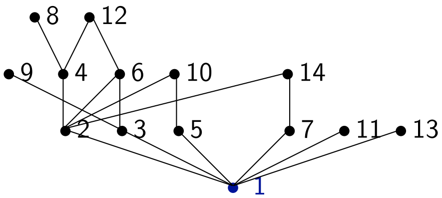
Se $X = \{2, 4, 6\}$, então os elementos maximais de X são o 4 e o 6; 2 é o único elemento minimal de X. Além disso,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Min}(X) = \{1, 2\}, & \mathrm{Maj}(X) = \{12\}, & \inf(X) = 2, \\ \min(X) = 2, & \sup(X) = 12, & \max(X) \text{ não existe.} \end{array}$$



Se $X = \{2, 3, 4, 6\}$, então os elementos maximais de X são o 4 e o 6; 2 e 3 são os elementos minimais de X. Além disso,

$\mathrm{Min}(X) = \{1\}$,	$\mathrm{Maj}(X) = \{12\}$,	$\inf(X) = 1$,
$\min(X)$ não existe,	$\sup(X) = 12$,	$\max(X)$ não existe.



Se $X = A \setminus \{1\}$, então os elementos maximais de X são: 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14; os elementos minimais de X são: 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Além disso,

$\mathrm{Min}(X) = \{1\}$,	$\mathrm{Maj}(X) = \varnothing$,	$\inf(X) = 1$,
$\min(X)$ não existe,	$\sup(X)$ não existe,	$\max(X)$ não existe.

Num c.p.o. $(A, \leq)$, são equivalentes as seguintes afirmações, para quaisquer $a, b \in A$:

1 | $a \leq b$;

2 | $\sup\{a, b\} = b$;

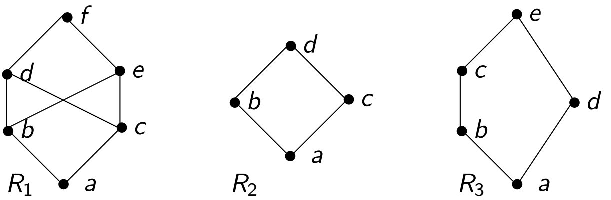
3 | $\inf\{a, b\} = a$.

Em seguida, consideramos algumas classes especiais de c.p.o.'s.

Um c.p.o. $(A, \leq)$ diz-se um **reticulado** quando, para quaisquer $x, y \in A$, existem o supremo e o ínfimo do conjunto $\{x, y\}$.

exemplo:

Consideremos os c.p.o.'s representados pelos seguintes diagramas:



Os c.p.o.'s R_2 e R_3 são reticulados.

R_1 não é reticulado pois, por exemplo, não existe supremo de $\{b, c\}$.

Uma ordem parcial $\leq$ num conjunto A diz-se uma **ordem total** ou **ordem linear** quando quaisquer elementos a e b de A são comparáveis. Neste caso, $(A, \leq)$ diz-se uma **cadeia** ou um **conjunto totalmente ordenado**.

Um subconjunto X de A diz-se uma **cadeia em** $(A, \leq)$ ou um **subconjunto totalmente ordenado de** $(A, \leq)$ quando, para quaisquer $x, y \in X$, x e y são comparáveis.

exemplo:

1 | $\{3, 6, 12\}$ e $\{2, 4\}$ são cadeias em $(\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}, |)$, mas este c.p.o. não é uma cadeia, pois 4 e 10 são incomparáveis.

2 | $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ são cadeias.

observação:

Toda a cadeia é um reticulado, mas o recíproco não se verifica.