RESOLUÇÃO DO TESTE TMD (24 NOVEMBRO 2012)

1.

a) Sendo r falsa, para φ ser falsa teríamos de ter $p \to q$ verdadeira, ou seja, p falsa ou q verdadeira.
Logo, não é independente dos valores de p e q e a afirmação é falsa.

(OBS: podia fazer-se uma tabela de verdade de φ e comprovar que podemos ter r falsa e φ verdadeira)

b) $$\psi \underset{\text{dupla negação}}{\Leftrightarrow} \neg\neg(p \vee q \vee r) \underset{\text{Leis de DeMorgan}}{\Leftrightarrow} \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

$\neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ é logicamente equivalente a ψ e não contém o conetivo $\vee$.

2.

a) $$y^3 x + x = 0 \Leftrightarrow (y^3+1)\,x = 0 \Leftrightarrow y^3 = -1 \vee x = 0$$
$$\Leftrightarrow y = -1 \vee x = 0$$

Pretendemos determinar $y \in A$ tal que $y^3 x + x = 0$ para todos os valores x de A.

Se $A = \{-3,-1,0,9\}$, podemos considerar $y = -1$: de facto, $(-1)^3 x + x = -x + x = 0$, para todo o valor de x em A. Logo, para este conjunto, p é verdadeira.

Se $A = \mathbb{N}$, $-1 \notin A$, pelo que $y^3 x + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Logo, para $x \neq 0$ não existe $y \in A$ tal que $y^3 x + x = 0$ e p é falsa.

b) $\forall_{y \in A} \exists_{x \in A} \quad y^3 x + x \neq 0$

3.

Admitamos que $12n - 40m = 20$ e que $m \neq 1$.

Suponhamos que $n = 5$. Então,

$$12n - 40m = 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12 \times 5 - 40m = 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 40m = 40 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m = 1,$$

uma contradição.

Logo, $n \neq 5$.

4. a) $x^2 \in B \Leftrightarrow x^2 = 1 \vee x^2 = 5$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1 \vee x = \pm \sqrt{5}.$$

Como $x = \sqrt{5} \notin \mathbb{Z}$ e $x = -\sqrt{5} \notin \mathbb{Z}$, consideramos apenas os valores de x^2+2 para $x=1$ e para $x=-1$.

Temos

$$x = 1 \Rightarrow x^2+2 = 3$$
$$x = -1 \Rightarrow x^2+2 = 3.$$

Assim, $C = \{3\}$.

b) $A \setminus B = \{\{1,5\}, 1, 5\} \setminus \{1,5\}$

$$= \{\{1,5\}\}$$

$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{3\}\}$

$(A \setminus B) \times \mathcal{P}(C) = \{(\{1,5\}, \emptyset), (\{1,5\}, \{3\})\}$

c) $\{1,5\} \in A \cap \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow \{1,5\} \in A \wedge \{1,5\} \in \mathcal{P}(A)$

$\Leftrightarrow \{1,5\} \in A \wedge \{1,5\} \subseteq A$

$\Leftrightarrow \underbrace{\{1,5\} \in A \wedge 1 \in A \wedge 5 \in A}_{\text{verdadeira.}}$

Logo, $\{1,5\} \in A \cap \mathcal{P}(A)$.

5. a) $A = \{1\}$
$B = \{2\}$

b) $A = B = \{1\}$

c) $A = \{1,2,3\}$
$B = \{1,2\}$
$C = \{3\}$

6.

a) Sejam $A = \{1\}$
$B = \{2\}$
$C = \{3,4\}$

Temos que $C \setminus A = C = C \setminus B$ mas $A \neq B$.

Logo, a afirmação é falsa.

b) $\{1,2\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ pois $\{1,2\} \subseteq \mathbb{N}$

$\{1,2\} \notin \mathcal{P}(P) \cup \mathcal{P}(I)$ pois $\{1,2\} \notin \mathcal{P}(P)$ e $\{1,2\} \notin \mathcal{P}(I)$

(uma vez que $\{1,2\} \not\subseteq P$ e $\{1,2\} \not\subseteq I$)

A afirmação é falsa.

c) Hip: $A \cup B = A \cup C$

Tese: $(A \cup C) \setminus B = A \setminus B$

Temos: $(A \cup C) \setminus B \underset{\substack{A \cup C = A \cup B \\ \text{por hip.}}}{=} (A \cup B) \setminus B = (A \setminus B) \cup \underbrace{(B \setminus B)}_{\emptyset} = A \setminus B$.