Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Licenciatura em Engenharia Informática
2012/2013

Tópicos de Matemática Discreta

prova escrita — 19 de janeiro de 2013 — duração: 2 horas

Justifique TODAS as suas respostas.

exercício 1. [1,5 valores] Dê exemplo de uma função

(a) $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$.

(b) $g : \mathbb{N} \to \{1, 2, 3\}$ não sobrejetiva.

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(h \circ h)(x) = x - 2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

exercício 2. [4 valores] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \{3, 10\}$ definida da seguinte forma

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \in]-\infty, 4[\cup]20, 30] \\ \\ 10 & \text{se } x \in [4, 20] \cup]30, +\infty[\end{cases}.$$

e a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $g(n) = 2 - \frac{1}{n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(a) Determine $g\big(\{1, 2, 3, 4\}\big)$ e $g^{\leftarrow}\big(\{1, 5\}\big)$.

(b) Determine $f\big(\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 16 = 0\}\big)$ e $f^{\leftarrow}(\{10\})$.

(c) Mostre que $f \circ g$ é uma função constante.

(d) Indique se alguma das funções f ou g é injetiva.

exercício 3. [2,5 valores] Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Considere as relações binárias $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)\}$ e $S = \{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 2), (d, 3)\}$ em A e de B para A, respetivamente.

(a) Determine R^{-1} e $R \circ S$.

(b) Indique quantas relações binárias T em A tais que $\mathrm{Dom}(T) = \{1\}$ e $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$ existem.

(c) Indique uma relação binária R' em A tal que $R' \subseteq R$ e R' é antissimétrica.

exercício 4. [2 valores] Seja $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$ e considere a relação de equivalência $\sim$ em A definida por

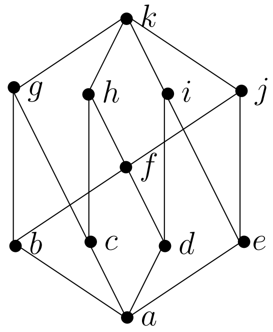
$$x \ \sim \ y \text{ se e só se } x + y = 2n,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$.

(a) Indique todos os elementos da classe $[2]_{\sim}$.

(b) Determine o conjunto quociente $A/\sim$.

exercício 5. [2,5 valores] Consideremos o c.p.o. $(A, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse associado:



(a) Seja $X = \{c, d, f, h\}$. Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de X em A e, caso existam, o supremo e o ínfimo de X.

(b) Indique, caso exista, um subconjunto Y de A com um elemento maximal que seja elemento minimal em A.

exercício 6. [3,75 valores] Dê exemplo, caso exista, de:

(a) um grafo com exatamente quatro vértices de grau par;

(b) um grafo desconexo;

(c) um grafo bipartido que contenha um ciclo de comprimento 8;

(d) um grafo conexo com 8 vértices, 3 dos quais com grau par;

(e) um grafo não euleriano.

exercício 7. [3,75 valores] Diga se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

(a) Se $f : X \to Y$ é uma função tal que existem dois subconjuntos A e B de X satisfazendo $A \neq B$ e $f(A) = f(B)$ então f é não bijetiva.

(b) Se R é uma relação de equivalência num conjunto A, então R não é uma relação de ordem parcial.

(c) Dado um c.p.o. $(A, \leq)$ e um subconjunto X de A, $\text{Maj}(X) \cap \text{Min}(X) = \emptyset$.