TMD

resolução prova escrita 19/1/2013

1.

a) $f: \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$
$n \longmapsto 2n$

(a cada natural n faz corresponder o par 2n, que obviamente pertence a 2IN)

b) $g: \mathbb{N} \longrightarrow \{1,2,3\}$
$n \longmapsto 1$

(g não é sobrejetiva pois 2 não é imagem de nenhum objeto: $2 \notin Im(g)$).

c) $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x-1$

$(h \circ h)(x) = h(h(x)) = h(x-1) = (x-1)-1 = x-2.$

2.

a) $g(\{1,2,3,4\}) = \{g(1), g(2), g(3), g(4)\} = \{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}\}.$

$g(1) = 2 - \frac{1}{1} = 1$

$g(2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$g(3) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{6}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$g(4) = 2 - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$g^{\leftarrow}(\{1,5\}) = \{n \in \mathbb{N} : g(n) \in \{1,5\}\}$
$= \{n \in \mathbb{N} : g(n)=1 \vee g(n)=5\} = \{1\}.$

$g(n)=1 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{n} = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{n} \Leftrightarrow n=1$

$g(n)=5 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{n} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{n} = -3 \Leftrightarrow n = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$

(logo, não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n) = 5$).

b) $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$

$f(\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 16 = 0\}) = f(\{4,-4\}) = \{f(4), f(-4)\} = \{3,10\}$

$f(4) = 10$
$f(-4) = 3$

$f^{\leftarrow}(\{10\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 10\}$

$= [4,20] \cup \,]30,+\infty[$

c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(2 - \frac{1}{n}\right)$

$= 3$

$\downarrow$

$1 \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$

$2 - \frac{1}{n} \in \,]-\infty, 4[\, \cup \,]20,30]$

d) f não é injetiva pois $f(1) = f(2) = 3$.

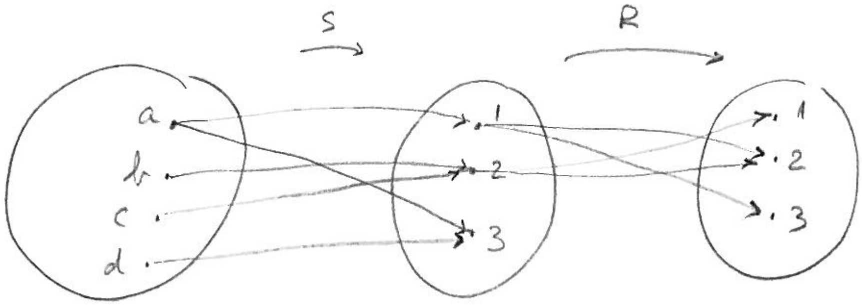
g é injetiva pois:

$g(n) = g(m) \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{m}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{n} = -\frac{1}{m} \Leftrightarrow n = m.$

3.

a) $R^{-1} = \{(2,1), (3,1), (1,2), (2,2)\}$



$R \circ S = \{(a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$.

b) T relação binária em A tal que $Dom(T) = \{1\}$ e $Im(T) \subseteq \{1,2\}$

$T = \{(1,1)\}$

ou

$T = \{(1,2)\}$

ou

$T = \{(1,1), (1,2)\}$ Existem 3.

c) $R' = \{(1,2)\}$ é tal que $R' \subseteq R$ (porque $(1,2) \in R$)

e R' é antissimétrica ($(1,2) \in R'$ e $(2,1) \notin R'$, sendo $(1,2)$ o único elemento de R').

4.

a) $x \sim 2 \iff x+2$ é par

$\iff x = 2 \lor x = 4 \lor x = 6$

Logo, $[2]_\sim = \{2,4,6\}$

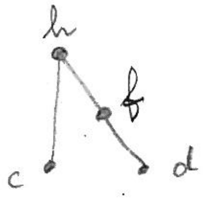
b) $[1]_\sim = \{x \in A : x+1 \text{ é par}\} = \{1,7,9\}$.

Assim,

$$A/\sim \;=\; \{\{2,4,6\}, \{1,7,9\}\}.$$

5.

a) X:



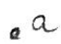
$Maj(X) = \{h, k\}$

$Min(X) = \{a\}$

$sup(X) = h$

$inf(X) = a$

b) $Y = \{a\}$



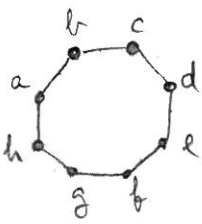
a é maximal e minimal em $(Y, \leq)$

a é minimal em $(A, \leq)$.

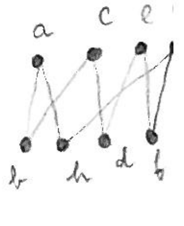
6. a)

b)

c)



$\cong$



d) não existe: existiriam 5 vértices com grau ímpar e sabemos que os vértices com grau ímpar têm de ser em nº par.

e)

(OBS: este ano não estudamos os grafos eulerianos)

7.

a) Se $A \neq B$, existe $x \in A$ tal que $x \notin B$ ou existe $x \in B$ tal que $x \notin A$.

Sem perda de generalidade, assumimos que existe $x \in A$ tal que $x \notin B$.

Temos que $f(x) \in f(A)$. Logo, $f(x) \in f(B)$. Portanto, existe $z \in B$ tal que $f(x) = f(z)$. Como $x \notin B$ e $z \in B$, temos que $x \neq z$. Logo, f não é injetiva.

Portanto, tão pouco é bijetiva. A afirmação é V.

b) $A = \{1,2\}$

$R = \{(1,1),(2,2)\}$ é simultaneamente relação de equivalência e relação de ordem parcial.

A afirmação é F.

c) Sejam $A = X = \{1\}$ e $\leq \, = \{(1,1)\}$:

$$Maj(X) \cap Min(X) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\} \neq \emptyset$$

A afirmação é F.