Universidade do Minho | LEI
Dep. Matemática e Aplicações | 2013/2014

Tópicos de Matemática Discreta

——— prova escrita — 2 de novembro de 2013 ——— duração: 2 horas ———

1. [**3 valores**] Considere as fórmulas $\varphi : \neg(p_0 \wedge p_1) \to (p_0 \to p_1)$ e $\psi : p_2 \vee (\neg p_3 \to p_2)$ do Cálculo Proposicional da Lógica Clássica.

(a) Diga, justificando, se a fórmula φ é uma tautologia.

(b) Justifique se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: se a fórmula ψ toma o valor lógico verdadeiro então p_2 também toma o valor lógico verdadeiro.

2. [**3,25 valores**] Considerando que p representa a proposição $\forall_{a \in A} \exists_{b \in B}\ (a^2 = b \vee a + b = 0)$,

(a) Verifique se p é verdadeira para $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 4\}$. Justifique.

(b) Indique em linguagem simbólica, sem recorrer ao símbolo de negação, uma proposição equivalente à negação de p.

3. [**2 valores**] Seja n um número natural ímpar. Mostre que $n^2 + 8n - 1$ é múltiplo de 4.

4. [**4,25 valores**] Considere os conjuntos

$$A = \{\{1, 3\}, 1, 4\}\,,\ B = \{-3, 1, 3\} \ \text{ e } \ C = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x| + 1 \in B\}.$$

(a) Determine $A \setminus B$. Justifique.

(b) Determine $\mathcal{P}(A \cap C)$. Justifique.

(c) Verifique se $\{-1, 3\} \subseteq C \cup B$. Justifique.

(d) $\{1, 3\} \in A \cap \mathcal{P}(A)$? Justifique.

5. [**3 valores**] Dê exemplo de ou justifique que não existem conjuntos A, B e/ou C tais que

(a) $(1, 2, 1) \in A \times B \times C$.

(b) $A \cup B = A \cap B$.

(c) $B \subseteq C$ e $A \cap \overline{C} \not\subseteq A \cap \overline{B}$.

6. [**4,5 valores**] Sejam A, B e C subconjuntos não vazios de um conjunto X. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

(a) Se $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$ então $A \cup B \subseteq C$.

(b) Se $A \cap B = \emptyset$ então $A \subseteq \overline{B}$.

(c) $(C \setminus A) \cap (A \cup B) = C \setminus B$.