TESTE TMD (2 NOVEMBRO 2013)

1. a)

p_0	p_1	$p_0 \wedge p_1$	$\neg(p_0 \wedge p_1)$	$p_0 \to p_1$	φ
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Como φ não assume sempre o valor lógico 1. Logo, φ não é uma tautologia

b) Se ψ é verdadeira, então p_2 é verdadeira ou $\neg p_3 \to p_2$ é verdadeira. Ora, $\neg p_3 \to p_2$ pode ser verdadeira sem p_2 o ser: se p_3 é verdadeira e p_2 é falsa, então $\neg p_3 \to p_2$ é verdadeira (e, consequentemente, ψ também).

Logo, a afirmação é falsa.

2.

a) Para $a = -2$, existe $b = 4$ tal que $a^2 = b$. Logo, para esses valores de a e b a proposição $(a^2 = b \vee a+b=0)$ é verdadeira.

Para $a = 2$, consideremos $b = 4$. Temos que $a^2 = b$. Portanto, $(a^2 = b \vee a+b=0)$ é verdadeira para esses valores de a e b.

Para $a = 0$, tomemos $b = 0$. Como $a^2 = b$, segue-se que $(a^2 = b \vee a+b=0)$ é verdadeira, para esses valores.

Para $a = 1$, tomemos $b = -1$. Temos que $a+b=0$. Logo, $(a^2 = b \vee a+b=0)$ é verdadeira para esses valores.

Assim, p é verdadeira para os conjuntos A e B indicados.

b) $\exists_{a\in A} \forall_{b\in B} \, (a^2 \neq b \wedge a+b \neq 0)$

3 Se n é ímpar, então $n = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}_0$.

Temos que

$$\begin{aligned} n^2+8n-1 &= (2k+1)^2 + 8\,(2k+1) - 1 \\ &= 4k^2+4k+1+16k+8-1 \\ &= 4\underbrace{(k^2+5k+2)}_{\in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Logo, n^2+8n-1 é múltiplo de 4

4.

a) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$= \{\{1,3\}, 4\}$ $\quad (1 \in A \wedge 1 \in B$: logo, $1 \notin A \setminus B)$

b) $C = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x|+1 \in B\}$

$2|x|+1 = -3 \Leftrightarrow 2|x| = -4$ impossível

$2|x|+1 = 1 \Leftrightarrow 2|x| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$2|x|+1 = 3 \Leftrightarrow 2|x| = 2 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Logo, $C = \{-1, 0, 1\}$

$A \cap C = \{1\}$.

Portanto, $\mathcal{P}(A \cap C) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

c) $C \cup B = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$

$\{-1, 3\} \subseteq C \cup B$ pois $-1 \in C \cup B$ e $3 \in C \cup B$

d) $\{1,3\} \in A$ mas $\{1,3\} \notin \mathcal{P}(A)$ (pois $\{1,3\} \nsubseteq A$, uma vez que $3 \notin A$). Logo, $\{1,3\} \notin A \cap \mathcal{P}(A)$.

5

(a) $A = C = \{1\}$
$B = \{2\}$

(b) $A = B = \{1\}$

(c) Não existem tais conjuntos.

Se $B \subseteq C$ então todos os elementos de B são elementos de C (i.e., $x \in B \to x \in C$).

Seja $x \in A \cap \bar{C}$.

Temos que

$$\begin{aligned} x \in A \cap \bar{C} &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \bar{C} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin C \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \cap \bar{B}. \end{aligned}$$

(se x não é elemento
de C então não pode
ser elemento de B — de outra forma, ao ser
elemento de B, seria também elemento
de C, o que é contraditório!)

Assim, $A \cap \bar{C} \subseteq A \cap \bar{B}$.

6.

a) A afirmação é falsa.
Para $A = \{1\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{1, 2\}$, temos que $A \subseteq C$ (donde $A \subseteq C \vee B \subseteq C$ é verdadeira), mas $A \cup B \nsubseteq C$.

b) Suponhamos que $A \nsubseteq \bar{B}$. Então, existe $x \in A$ tal que $x \notin \bar{B}$. Assim, existe $x \in A$ tal que $x \in B$.
Logo, existe $x \in A \cap B$, o que é impossível.
Assim, $A \subseteq \bar{B}$.

c) $C = \{1, 2, 3\}$

$A = \{2\}$

$B = \{3, 4\}$

$C \setminus A = \{1, 3\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4\}$

$(C \setminus A) \cap (A \cup B) = \{3\}$

$C \setminus B = \{1, 2\}$

Logo, $(C \setminus A) \cap (A \cup B) \neq C \setminus B$ e a afirmação é falsa.