Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

LEI
2013/2014

Tópicos de Matemática Discreta

prova escrita A — 25 de janeiro de 2014 — duração: 2 horas

nome: ______________________________ número ______

I.

Em cada exercício deste grupo, assinale a **única** afirmação verdadeira. Cada resposta certa vale $1,25$ valores e cada resposta errada desconta $0,25$ valores.

1. Sejam A um subconjunto de $\mathbb{N}$ e f uma função de $\mathbb{Z}$ em A.

(a) Se 3 e 5 são elementos de A e $f(\{1,2,3\}) = \{3,5\}$ então f não é sobrejetiva.

(b) Se 3 e 5 são elementos de A e $f^{\leftarrow}(\{3,5\}) = \{1,2\}$ então f é injetiva.

(c) Se $A = \{3,5\}$ então f não é bijetiva.

2. Sejam f, g e h as funções de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ definidas por:

$$f(n) = n+3; \qquad g(n) = 2n; \qquad h(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ 2, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

(a) $f \circ g$ é uma função constante.

(b) $(h \circ g \circ f)(5) = 1$.

(c) $(h \circ f \circ g)(\{1,2,4,5\}) = \{1,2\}$.

3. Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b,c,d\}$. Considere as relações binárias $R = \{(1,a),(1,d),(2,a),(2,c)\}$ e $S = \{(a,1),(a,3),(b,2),(c,2),(d,3)\}$ de A para B e de B para A, respetivamente.

(a) $R^{-1} \cap S = \{(1,a),(2,c)\}$.

(b) $R \circ S = \{(a,d),(b,c),(b,a),(c,a)\}$.

(c) Não existe nenhum $x \in A$ tal que $(3,x) \in S \circ R$.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Se $G = (V,E)$ tem A como matriz de incidência, então G tem 2 vértices de grau par e 2 vértices de grau ímpar.

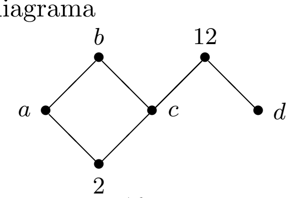
(b) Existe uma árvore que tem A como matriz de incidência.

(c) Existe um grafo simples que tem A como matriz de adjacência.

II.

Em cada exercício deste grupo, apresente a sua resposta sem justificar.

1. [1 valor] Indique naturais a, b, c e d tais que o diagrama



seja o diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado $(\{a, b, c, d, 2, 12\}, |)$, em que $|$ representa a relação "divide".

$a =$ __________ $b =$ __________ $c =$ __________ $d =$ __________

2. [3 valores] Considere $A = \{a, b, c, d, 2, 12\}$ e (A, ρ), um c.p.o. cujo diagrama de Hasse é o diagrama dado no exercício anterior. Seja $X = \{a, c, d\}$. Indique:

(a) os elementos maximais de A: ____________________

(b) o conjunto dos majorantes de X: ____________________

(c) os elementos minimais de X: ____________________

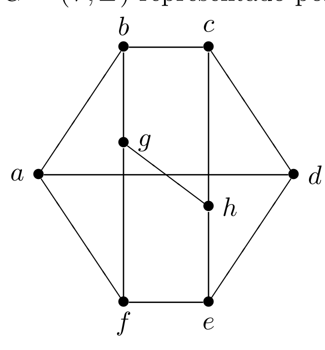
(d) um subconjunto Y de A tal que $\sup(Y) = c$: ____________________

3. [2 valores] Seja R a relação de equivalência em $A = \{1, 3, 4, 8, 10, 13\}$ definida por $x \; R \; y$ se $x - y$ é múltiplo de 3.

(a) $[1]_R =$ ____________________

(b) $A/R =$ ____________________

4. [3 valores] Considere o grafo $G = (V, E)$ representado por



(a) Indique um caminho elementar de a para d de comprimento 7.

(b) Indique um caminho simples de a a d que não seja elementar.

(c) Indique um ciclo com vértice inicial g.

III.

Responda às questões deste grupo justificando convenientemente as suas respostas.

1. **[2 valores]** Mostre que $(2^n)^2 - 1$ é um múltiplo de 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. [**2 valores**] Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Seja R a menor relação de ordem parcial em A tal que $(1, 3), (3, 2), (3, 4) \in R$. Determine R.

3. [**2 valores**] Considere o grafo do exercício 4 do grupo II. Mostre que G é bipartido.