Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

LEI
2013/2014

# Tópicos de Matemática Discreta

prova escrita A — 25 de janeiro de 2014 — duração: 2 horas

nome: ______________________________ número ______

## I.

Em cada exercício deste grupo, assinale a **única** afirmação verdadeira. Cada resposta certa vale 1,25 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

**1.** Sejam $A$ um subconjunto de $\mathbb{N}$ e $f$ uma função de $\mathbb{Z}$ em $A$.

(a) Se 3 e 5 são elementos de $A$ e $f(\{1,2,3\}) = \{3,5\}$ então $f$ não é sobrejetiva.

(b) Se 3 e 5 são elementos de $A$ e $f^{\leftarrow}(\{3,5\}) = \{1,2\}$ então $f$ é injetiva.

(c) Se $A = \{3,5\}$ então $f$ não é bijetiva.

**2.** Sejam $f$, $g$ e $h$ as funções de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ definidas por:

$$f(n) = n+3; \qquad g(n) = 2n; \qquad h(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ 2, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

(a) $f \circ g$ é uma função constante.

(b) $(h \circ g \circ f)(5) = 1$.

(c) $(h \circ f \circ g)(\{1,2,4,5\}) = \{1,2\}$.

**3.** Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b,c,d\}$. Considere as relações binárias $R = \{(1,a),(1,d),(2,a),(2,c)\}$ e $S = \{(a,1),(a,3),(b,2),(c,2),(d,3)\}$ de $A$ para $B$ e de $B$ para $A$, respetivamente.

(a) $R^{-1} \cap S = \{(1,a),(2,c)\}$.

(b) $R \circ S = \{(a,d),(b,c),(b,a),(c,a)\}$.

(c) Não existe nenhum $x \in A$ tal que $(3,x) \in S \circ R$.

**4.** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Se $G = (V,E)$ tem $A$ como matriz de incidência, então $G$ tem 2 vértices de grau par e 2 vértices de grau ímpar.

(b) Existe uma árvore que tem $A$ como matriz de incidência.

(c) Existe um grafo simples que tem $A$ como matriz de adjacência.

JUSTIFICAÇÕES GRUPO I

1.

$A \subseteq \mathbb{N}$

$f: \mathbb{Z} \longrightarrow A$

(a) Se $A = \{3,5\}$ e $f$ é tal que $f(n) = \begin{cases} 3 & \text{se } n \text{ é par} \\ 5 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$, então

$f(\{1,2,3\}) = \{3,5\}$. Além disso, $f$ é sobrejetiva.

Por isso, (a) não é verdadeira.

(b) Da afirmação apenas sabemos que $\{f(1), f(2)\} = \{3,5\}$.
Assim, $f(1) \neq f(2)$, mas isso não significa que $f$ seja injetiva.

De facto, se $A = \mathbb{N}$ e

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z} &\longrightarrow A \\ 1 &\longmapsto 3 \\ 2 &\longmapsto 5 \\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{1,2\} &\longmapsto 7 \end{aligned}$$

, temos que $f$ não é injetiva e, no entanto, $f^{\leftarrow}(\{3,5\}) = \{1,2\}$.
A afirmação (b) é falsa

(c) Se $A = \{3,5\}$, então $A$ é um conjunto finito.
Sendo $f: \mathbb{Z} \to A$ uma função, $f$ nunca poderá ser bijetiva.
De facto, $f(n) = 3$ ou $f(n) = 5$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
Portanto, $f$ não é injetiva.

A afirmação (c) é verdadeira.

2.

(a) $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(2n) = 2n+3$
não é constante!
A afirmação (a) é falsa.

(b) $(h \circ g \circ f)(5) = (h \circ g)(f(5)) = (h \circ g)(5+3) =$

$= h(g(8)) = h(2 \times 8) = h(16) \underset{\substack{\downarrow \\ 16 \text{ é par}}}{=} 1.$

A afirmação (b) é verdadeira.

(c) $(h \circ f \circ g)(n) = (h \circ f)(g(n)) = (h \circ f)(2n) =$

$= h(f(2n)) = h(2n+3) \underset{\downarrow}{=} 2$.

2n+3 é
ímpar para todo n.

Logo, $(h \circ f \circ g)(\{1,2,4,5\}) = \{2\}$.

A afirmação (c) é falsa.

3.

(a) $R^{-1} = \{(a,1),(d,1),(a,2),(c,2)\}$

$S = \{(a,1),(a,3),(b,2),(c,2),(d,3)\}$

$R^{-1} \cap S = \{(a,1),(c,2)\}$.

A afirmação (a) é falsa.

(b) $R \circ S = \{(a,a),(a,d),(b,a),(b,c),(c,a),(c,c)\}$

$\neq \{(a,d),(b,c),(b,c),(c,a)\}$

A afirmação (b) é falsa.

(c) $S \circ R = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(2,2)\}$

Logo, não existe nenhum $x$ tal que $(3,x) \in S \circ R$.

A afirmação (c) é verdadeira.

4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz nunca poderia ser uma matriz de adjacência de um grafo simples pois tem elementos diagonais diferentes de 0 e não é simétrica ($A \neq A^T$). Logo, a afirmação (c) é falsa.

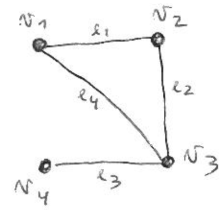
Pensando em A como uma matriz de incidência de um grafo simples, teremos 4 vértices e 4 arestas.

Como numa árvore, o número de vértices é superior ao número de arestas, a afirmação (b) é falsa.

A afirmação (a) é verdadeira:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

G :



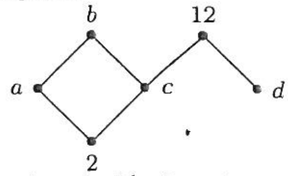

grau $(v_1) = 2$
grau $(v_2) = 2$
grau $(v_3) = 3$
grau $(v_4) = 1$.

Em G há dois vértices de grau par e dois vértices de grau ímpar.

II.

Em cada exercício deste grupo, apresente a sua resposta sem justificar.

**1.** [**1 valor**] Indique naturais $a, b, c$ e $d$ tais que o diagrama




seja o diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado $(\{a, b, c, d, 2, 12\}, |)$, em que $|$ representa a relação "divide".

$a =$ 10 $b =$ 40 $c =$ 4 $d =$ 3

**2.** [**3 valores**] Considere $A = \{a, b, c, d, 2, 12\}$ e $(A, \rho)$, um c.p.o. cujo diagrama de Hasse é o diagrama dado no exercício anterior. Seja $X = \{a, c, d\}$. Indique:

(a) os elementos maximais de $A$: b, 12

(b) o conjunto dos majorantes de $X$: {}

(c) os elementos minimais de $X$: a, c, d.

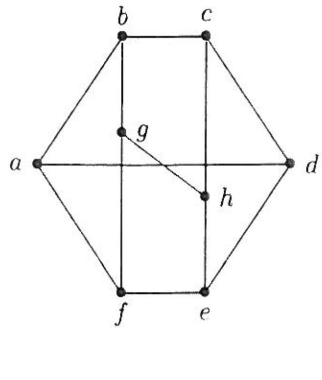
(d) um subconjunto $Y$ de $A$ tal que $\sup(Y) = c$: {2, c} (ou {c})

**3.** [**2 valores**] Seja $R$ a relação de equivalência em $A = \{1, 3, 4, 8, 10, 13\}$ definida por $x \; R \; y$ se $x - y$ é múltiplo de 3.

(a) $[1]_R =$ {1, 4, 10, 13}

(b) $A/R =$ { {1, 4, 10, 13}, {3}, {8} }

**4.** [**3 valores**] Considere o grafo $G = (V, E)$ representado por



(a) Indique um caminho elementar de $a$ para $d$ de comprimento 7.

$\langle a, b, g, f, e, h, c, d \rangle$

(b) Indique um caminho simples de $a$ a $d$ que não seja elementar.

$\langle a, d, c, h, e, d \rangle$

(c) Indique um ciclo com vértice inicial $g$.

$\langle g, h, e, f, g \rangle$

III.

Responda às questões deste grupo justificando convenientemente as suas respostas.

**1.** [**2 valores**] Mostre que $(2^n)^2 - 1$ é um múltiplo de 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $P(n)$ o predicado $(2^n)^2-1$ é múltiplo de 3, para $n \in \mathbb{N}$.

I. Se $n=1$, $(2^n)^2-1 = 2^2-1 = 3$.
Como 3 é múltiplo de 3, $P(1)$ é verdadeira.

II. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(n)$ é verdadeira, i.e.,
$(2^n)^2-1 = 3r$ para algum $r \in \mathbb{N}$. (H.I.)
Queremos mostrar que
$(2^{n+1})^2-1 = 3s$ para algum $s \in \mathbb{N}$

Temos

$$(2^{n+1})^2 - 1 = 2^{2n+2} - 1 = 2^{2n} \times 2^2 - 1$$
$$= 4 \times 2^{2n} - 1$$
$$= 4 \times (3r+1) - 1 = 12r + 4 - 1 = 12r + 3$$
$$= 3 \underbrace{(4r+1)}_{:= s \in \mathbb{N}}$$

Por H.I.
$(2^n)^2-1 = 3r$
Logo, $2^{2n} = 3r+1$

Portanto, $P(n+1)$ é verdadeira.

Por I e II, pelo Princípio de Indução em $\mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$

**2.** [**2 valores**] Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Seja $R$ a menor relação de ordem parcial em $A$ tal que $(1, 3), (3, 2), (3, 4) \in R$. Determine $R$.

Se $R$ é uma relação de ordem parcial então $R$ tem de ser reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Para que $R$ seja reflexiva, temos de ter $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \in R$.

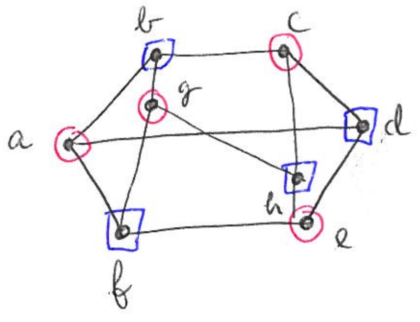
Pelo enunciado, temos de ter $(1,3), (3,2), (3,4) \in R$

Como $(1,3) \in R$ e $(3,2) \in R$, para que $R$ seja transitiva, é necessário ter $(1,2) \in R$.

Como $(1,3) \in R$ e $(3,4) \in R$, é também necessário ter $(1,4) \in R$.

Tomando $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,3), (3,2), (3,4), (1,2), (1,4)\}$, temos que $R$ é reflexiva, antissimétrica (se $a \neq b$ e $(a,b) \in R$, então $(b,a) \notin R$) e transitiva ($R \circ R = R$).

**3.** [**2 valores**] Considere o grafo do exercício 4 do grupo II. Mostre que $G$ é bipartido.




Sejam $X = \{a, c, e, g\}$ e $Y = \{b, d, f, h\}$. Temos que $\{X, Y\}$ é uma partição do conjunto dos vértices de $G$ e nenhum vértice de $X$ é adjacente a outro vértice de $X$, passando-se o mesmo para os vértices de $Y$. A seguinte representação de $G$ mostra que $G$ é bipartido: